

I. Ha nem volna kikötve, hogy a pontok ne lehessenek egy egyenesen, akkor pl. a számegyenes összes racionális koordinátájú pontja eleget tenne a feladat első követelményének. Így természetesnek tűnik, hogy – amennyiben egyáltalán teljesíthető a követelmény – legkönnyebben olyan ponthalmazt konstruálhatunk, amelynek pontjai egynek a kivételével egy egyenesen vannak.

Próbáljuk ezért az egyenes szerepére a koordináta-rendszer  $x$  tengelyét venni, külső pontnak pedig a  $P_0(0; 1)$  pontot. Ha még a  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) pontokat úgy adjuk meg, hogy minden  $k$ -ra  $P_k = (\pm k, 0)$  és  $x_k$  racionális, akkor csak arra kell ügyelnünk, hogy a  $P_0P_k$  távolság minden  $k$ -ra racionális legyen.

Legyen a  $P(x, 0)$  pont olyan, hogy  $x$  racionális, azaz  $x = r/s$ , ahol  $r$  és  $s$  egész szám,  $s \neq 0$ . A  $P_0P$  távolság Pitagorasz tétele szerint

$$\sqrt{1 + \frac{r^2}{s^2}}.$$

Ahhoz, hogy ez racionális legyen, az kell tehát, hogy

$$1 + \frac{r^2}{s^2} = \frac{t^2}{u^2}$$

fenálljon, ahol  $t$  és  $u$  is egészek,  $u \neq 0$ .

Feltehető, hogy  $s = u$ , ez annyit jelent, hogy  $x$  és a  $P_0P$  távolság eleve közös nevezőre hozott alakban szerepel. Ekkor egyenlőségünk így alakul:

$$r^2 + s^2 = t^2.$$

Feladatunk tehát arra redukálódott, hogy olyan  $r, s, t$  pozitív egész számokat kell keresni, melyekre  $r^2 + s^2 = t^2$ . Az ilyen számhármásokat pitagoraszi számhármásoknak nevezik. Megmutatjuk, hogy megadható végtelen sok ilyen számhármás, melyekre  $r/s$  mind különböző. Ebből már következik, hogy csupa különböző  $x$  koordinátájú ponthoz jutunk.

Legyen

$$r = k^2 - 1, \quad s = 2k, \quad t = k^2 + 1,$$

ahol  $k$  egész szám. Könnyű belátni, hogy minden egész  $k$ -ra  $r, s, t$  valóban pitagoraszi számhármás:

$$k^4 + 2k^2 + 1 + 4k^2 = k^4 + 2k^2 + 1.$$

Másrészt

$$\frac{r}{s} = \frac{k^2 - 1}{2k} = \frac{1}{2} \left( k - \frac{1}{k} \right),$$

azaz minden  $k$ -ra  $r/s$  értéke más és más.

Tehát a

$$P_0 = (0; 1), \quad P_k = \left( \frac{k^2 - 1}{2k}, 0 \right) \quad k = 1, 2, \dots$$

pontok eleget tesznek a feladat első követelményének, hiszen a  $P_kP_j$  távolság, ha  $k > j > 0$ , egész, akkor 2 racionális szám különbsége, és a  $P_kP_0$  távolság

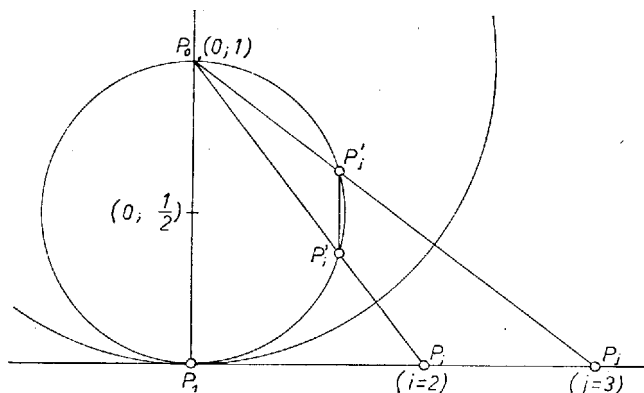
$$\sqrt{1 + \left( \frac{k^2 + 1}{2k} \right)^2} = \frac{k^2 + 1}{2k},$$

és ez is racionális.

II. Ahhoz, hogy a feladat második követelménye is teljesüljön, egy olyan transzformációra volna szükség, mely az egyenest olyan görbébe viszi át, melynek semelyik 3 pontja nincs egy egyenesen.

Ilyen transzformáció az inverzió, egyenest általában körbe visz át.

Legyen az inverzió középpontja (pólusa) a fenti  $P_0$  pont, és invertáljuk az  $x$  tengelyt a  $P_0$  középpontú, egységsugarú körre. Erre az  $x$  tengely inverze a  $(0; 1/2)$  középpontú,  $1/2$  sugarú kör. Megmutatjuk, hogy a  $P'_i$  és  $P'_j$  inverz pontok  $P'_iP'_j$  távolsága is racionális. A  $P_0P_iP_j$  és  $P_0P'_iP'_j$  háromszögek ugyanis hasonlóak, mert  $P_0$ -nál levő szögük közös, és (1. ábra):



1. ábra

$$\frac{P_0P_i}{P_0P_j} = \frac{P_0P'_j}{P_0P'_i},$$

hiszen az inverzió definíciója szerint  $\overline{P_0P_i} \cdot \overline{P_0P'_i} = \overline{P_0P_j} \cdot \overline{P_0P'_j} = 1$ . Az utóbbi egyenlőségből az is következik, hogy  $P_0P'_i$  és  $P_0P'_j$  is racionális, hiszen ezek a racionális  $P_0P_i$ ,  $P_0P_j$  távolságok reciprokával egyenlőek. A hasonlóság miatt

$$P'_iP'_j = \frac{P_0P'_i}{P_0P_i} \cdot P_iP_j = \frac{P_iP_j}{P_0P_i^2},$$

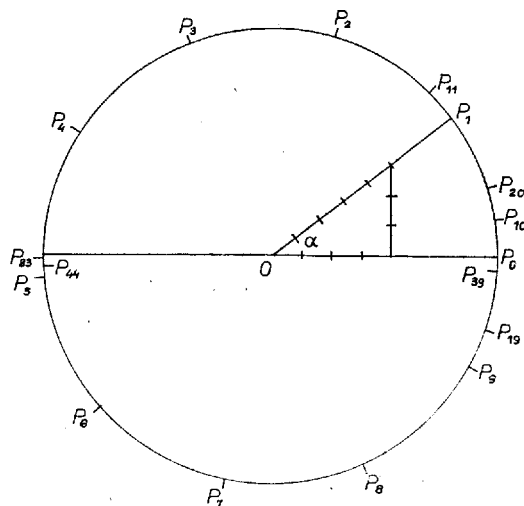
tehát  $P'_iP'_j$  is racionális.

Ezek szerint a  $P_i$  pontok ( $i > 0$ ) invertálásával sikerült olyan pontokat megadni, melyek egy körön vannak, tehát köztük nincs három egy egyenesen, és közülük bármelyik kettő távolsága racionális. – Azt is látjuk, hogy a  $P$  pontokhoz  $P_0$ -t is hozzávehetjük, hiszen  $P_0P'_i$  is racionális.

Komjáth Péter, Göndöcs Ferenc

**II. megoldás.** A feladat két részét egy csapásra oldjuk meg, ha megadunk végtelen sok pontot egy körön úgy, hogy közülük bármely két pont távolsága racionális.

Induljunk ki az egység sugarú kör egy  $P_0$  pontjából, és forgassuk el a pontot rendre  $\alpha$ ,  $2\alpha$ , ...,  $n\alpha$ , ... szöggel. A kapott pontokat jelöljük  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ -nel (2. ábra).



2. ábra

Nézzük meg, mi a feltétele annak, hogy így végtelen sok különböző pontot kapjunk. Nyilvánvaló, hogy akkor és csak akkor kapunk végtelen sok különböző pontot, ha nincs olyan  $n$  és  $k$  egész szám, amelyre  $n\alpha = k \cdot \pi$  teljesül. Következésképpen ha nincs olyan  $n$ , melyre  $\sin n\alpha = 0$  lenne, akkor valóban végtelen sok különböző pontot kapunk,  $n$ -et minden határon túl növelve.

Elegendő azt biztosítani, hogy a  $P_0P_n$  távolság racionális legyen minden természete  $n$ -re, hiszen ha  $k < l$ , akkor a  $P_kP_l$  távolság egyenlő a  $P_0P_n$  távolsággal, ha  $n = l - k$ . Jelöljük az  $OP_0P_n$  háromszög  $O$ -nál levő szögét  $\omega$ -val, akkor

$$P_0P_n = 2 \sin \frac{\omega}{2} = 2 \left| \sin \frac{n\alpha}{2} \right|,$$

hiszen  $(n\alpha - \omega)$  vagy  $(n\alpha + \omega)$  a  $2\pi$ -nek egész számú többszöröse. Jelöljük  $\alpha/2$ -t  $\beta$ -val, így olyan  $\beta$  kell keresnünk, melyre  $\sin n\beta$  racionális minden  $n$  természetes számra. Ismeretes, hogy  $\sin l\beta$  megadható  $\sin \beta$  és  $\cos \beta$  polinomjaként. Nevezetesen

$$(1) \quad \sin l\beta = \sin \beta (2^{l-1} \cos^{l-1} \beta + a_1 \cos^{l-3} \beta + a_2 \cos^{l-5} \beta + a_3 \cos^{l-7} \beta + \dots),$$

ahol  $a_1, a_2, \dots$  egész számok.<sup>1</sup> Ha tehát  $\sin \beta$  és  $\cos \beta$  racionális, akkor  $\sin l\beta$  is racionális minden  $l = 1, 2, \dots$  számra.

Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek egyik hegyesszöge  $\beta$ . Ha a háromszög oldalai  $a, b$  és  $c$  egészek, akkor mind  $\sin \beta$  mind  $\cos \beta$  racionális. Tegyük fel, hogy  $a$  és  $c$  relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1. Ekkor  $\cos \beta = a/c$  és legyen  $c$  a 2-től különböző. (Ilyen háromszög van, pl.  $a = 3, b = 4, c = 5$ .)

<sup>1</sup>Lásd pl. 1575. feladat, K. M. L. 37 (1968) 120. o.

Megmutatjuk, hogy a fenti feltételeket kielégítő  $\beta$ -kra  $\sin l\beta \neq 0$ , minden  $l$ -re. (Ebből következik, hogy  $\sin l\alpha = 0$  sem következik be semmilyen  $l$ -re.)

(1)-ből átrendezéssel és  $c^{l-1}$ -nel való beszorzással adódik

$$\frac{\sin l\beta}{\sin \beta} \cdot c^{l-1} - c^{l-1} \cdot 2^{l-1} \cos^{l-1} \beta = a_1 c^{l-1} \cos^{l-3} \beta + a_2 c^{l-1} \cos^{l-5} \beta + \dots$$

Ha  $\sin l\beta = 0$  lenne valamely  $l$ -re, akkor a bal oldal értéke

$$c^{l-1} \cdot 2^{l-1} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{l-1} = (2a)^{l-1}$$

lenne, míg a jobb oldalon egy, a  $c^{l-1}$ -nel osztható szám állna, hiszen

$$a_k c^{l-1} \cos^{l-2k-1} \beta = a_k c^{l-1} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{l-2k-1} = a_k a^{l-2k-1} c^{2k}.$$

Mivel  $a$  és  $c$  relatív prímek, ez ellentmondás. Tehát  $\sin l\beta$  semmilyen  $l$ -re nem nulla, amint állítottuk.

*Ferró József, Papp Zoltán*