

A bizonyítás alapötlete a következő. Az $f(uv)$ kifejezést megpróbáljuk úgy átalakítani, hogy olyan típusú kifejezéseket kapjunk, amelyek határértéke $f(u)$, ill. $f(v)$. Ehhez új tagokat „csempészünk be” $f(uv)$ -be a következőképpen:

$$\begin{aligned} f(uv) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(uv)^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^x v^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u^x v^x - u^x + u^x - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u^x(v^x - 1)}{x} + \frac{u^x - 1}{x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{u^x - 1 + 1}{x} \cdot x \right) \cdot \frac{v^x - 1}{x} + \frac{u^x - 1}{x} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{u^x - 1}{x} \cdot x + 1 \right) \cdot \frac{v^x - 1}{x} + \frac{u^x - 1}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Legyen most x olyan, a 0-hoz tartó sorozat, melynek végtelen sok tagja különböző 0-tól. Felhasználva a határértékekre vonatkozó elemi azonosságokat, adódik, hogy

$$f(uv) = \{f(u) \cdot (\lim_{x \rightarrow 0} x + 1) \cdot f(v) + f(u) = f(v) + f(u),$$

hiszen $f(u) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, mivel $f(u)$ véges és $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, és így a feladat feltétele szerint $f(uv)$ is létezik és véges.

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás nem a lehető legegyszerűbb. Az egyszerűbb megoldásokkal szemben viszont előnye, hogy kevés más ismeretet tételez fel.

Ha például felhasználjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} u^x = 1$, akkor bizonyításunk jóval egyszerűbbé válik:

$$\begin{aligned} f(uv) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u^x(v^x - 1)}{x} + \frac{u^x - 1}{x} \right\} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} u^x \right) \cdot f(v) + f(u) = f(u) + f(v). \end{aligned}$$

2. Könnyű észrevenni, hogy

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^x - a^0}{x - 0},$$

s a jobb oldal éppen az a^x függvény különbségi hányadosa az $x = 0$ helyen. Vagyis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^0}{x - 0},$$

ami a feladat szerint létezik, éppen az a^x függvény differenciálhányadosa a 0 helyen. És mivel a^x differenciálhányadosa $a^x \cdot \ln a$, ennek értéke az $x = 0$ helyen éppen $\ln a$. Ekkor a bizonyítandó állítás a jól ismert

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v$$

azonosság. Ez az észrevétel már túlmegy a feladat megoldásához szükséges ismeretanyagban.

3. Kilenc dolgozat az ún. l' Hospital-féle szabály felhasználásával vélte megoldani a feladatot. Ez egyrészt túlságosan „nagy ágyú”, másrészt alkalmazása körületekintést is igényel, és erről megfélekedtek. A határérték tételek alkalmazása nem úgy megy, mint az egyszeregyé.