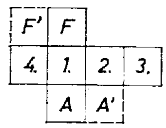
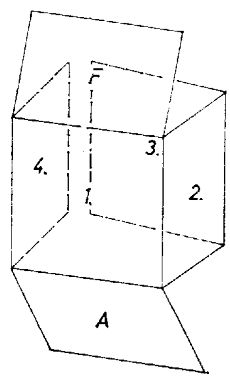
**I. megoldás.** A kockamodell minden egyes összefüggő kiterítése 6 egymáshoz csatlakozó négyzet, 5 él hajtogatható, a többi 7 van felvágva. A 3 élirány mindegyike képviselve van e vágásokban, mert ha pl. a 4 függőleges él egyike sem lenne felvágva, akkor a 7 vágott élből 4 esnék vagy az alaplap, vagy a fedőlap kerületére és azt a lapot elvágná a többiektől (másrészt pedig a 4 oldallap legföljebb kétrétűen lenne lelapítható a síkba). Ez azt is jelenti, hogy minden lapnak legföljebb 3 élét vághatjuk fel.

a) Ha van olyan élirány, amelyikkel párhuzamos 4 él közül csak 1-et vágtunk fel, akkor tartsuk ezt függőlegesen. Minden ilyen kiterítésben a 4 oldallap egymás után csatlakozik egy $4 \times 1$-es téglalappá, a további 6 vágásból 3–3 az alap-, illetve a fedőlapot teszi hajtogathatóvá, ezek a téglalap egyik egyik hosszabb oldalán csatlakoznak a palást-téglalaphoz. Megjegyezzük csupán, hogy erre a lényegesen különböző – azaz tükrözéssel, forgatással egymásba át nem vihető – lehetőségek száma 6: ha az $F$ fedőlap az 1. ábra $F'$ helyzetében van, akkor az $A$ alaplap az alsó élen 4-féleképpen csatlakozhat, az $F$ helyzetben pedig 2 módon: $A$-ban és $A'$-ben; a lehetőségek száma egyébként nem lényeges az állítás szempontjából.



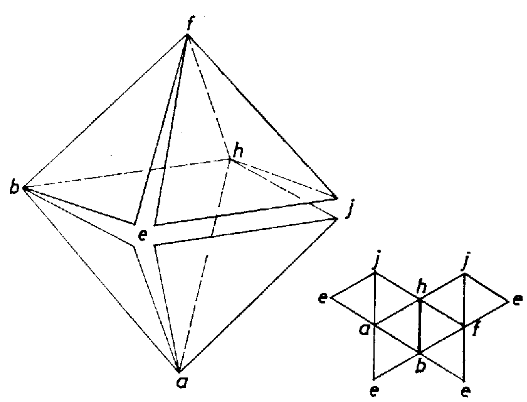

*1. ábra*

Az ilyen esetekben az oktaédernek 4 éle vízszintes, közülük az előírás szerint 3-at vágunk fel; a modellje már evvel szétnyílik két négy oldalú gúla palásttá (2. ábra).




*2. ábra*

E két paláston viszont csak 1–1 oldalélt vágunk fel, így a két gúlapalást 4–4 háromszöglapja külön-külön összefüggő marad és kiteríthető, továbbá e két palást egymással is összefügg a nem vágott vízszintes él mentén és kiteríthető. Az 1. ábrabeli kiterítés megfelelője a 2a. ábrán látható.

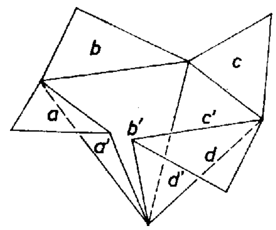



*2a. ábra*

Az ide tartozó esetekben tehát igazoltuk a feladat állítását.

b) A kockamodell hátralevő felvágási lehetőségeiben mindhárom éliránnyal párhuzamosan legalább 2 élt vágunk fel. A 7 vágás egyetlen lehetséges ilyen eloszlása 3+2+2. Vágjunk fel a függőleges élekből 3-at, vagyis csak 2 oldallapot hagyunk egymással közvetlen kapcsolatban – ezeket tekintjük a kiterítés magjának –, ezekhez közvetlenül csak $A$ és $F$ csatlakozhat, és legalább az egyik csatlakozik is, a további 2 oldallap pedig $A$ és $F$ valamelyikén át csatlakozik.

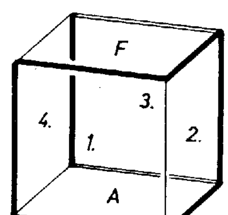
Legyen mindvégig a kocka (hajtogatva) együtt maradó két oldallapja az 1. ábra 1-es és 2-es lapja – mondjuk így is: elülső és jobb oldali lapja. Az oktaédermodell innen adódó felvágásai céljára leírjuk egy az $a$) részben már látott felvágását. Fordítsuk úgy a 2. ábra modelljét, hogy elülső csúcsa fölülre és jobb oldali csúcsa előre jusson (3. ábra), így a felső gúla $a$, $b$, $c$, $d$ lapjai virágsziromszerűen szétnyílnak és mind a 4 vízszintes él hajtogatott.




*3. ábra*

Ebből származtatjuk a hátralevő kockafelvágásoknak megfelelő oktaéderfelvágásokat úgy, hogy bizonyos lapokat levágunk és valamelyik szomszédjukra átragasztjuk őket. Az 1-es, 2-es hajtogatás miatt $d$ mindenesetre levágandó lesz $d'$-ről, a többi 3 alsó–felső lappár viszont mindig együtt marad, $a$ az $a'$-vel, $b$ a $b'$-vel, $c$ a $c'$-vel.

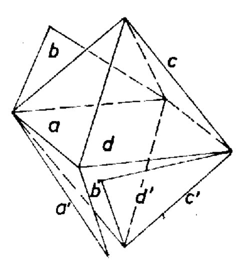
b 1. Tekintsük először a kockának azokat a felvágásait, amelyekben az 1, 2 maghoz $A$ és $F$ közül csak az egyik csatlakozik. Az 1, 2 mag szimmetrikus egyrészt a vízszintes felező síkra, másrészt a közös élükön átmenő átlós síkra, ezért elég azt vennünk, ha a maghoz csatlakozó lap $A$, és ha ez az 1-es alá csatlakozik. Ezzel (a 3 oldalélen túl) további 3 élt vágtunk fel: 2 fedőélt, valamint a 2-es és $A$ lapok közti élt (a 4. ábrán az eddigi 6 vágott él vastagítva van), közülük 2 elölről hátra fut, ezért a 4-es (bal oldal-) lap ezekkel párhuzamos élei már nem vághatók, tehát a 4-eshez két párhuzamos oldalán csatlakozik $A$ és $F$.




*4. ábra*

A hetediknek felvágandó él a 3-as (hátulsó) lapot választja majd el vagy $A$-tól, vagy $F$-től (az ábra kettős vonalú élei), tehát a befejezésre itt 2 lehetőség van.

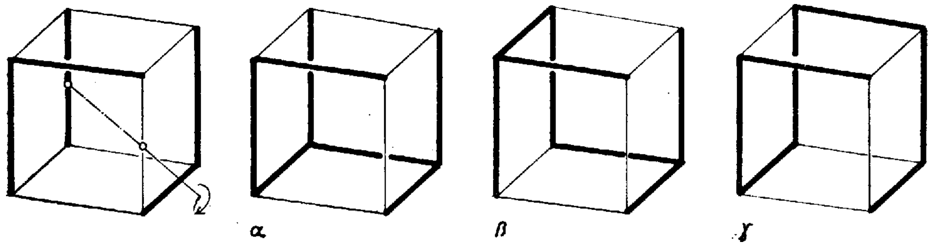
Felsoroljuk a 3. ábra virágján végzendő változtatásokat. A két felvágott fedőél miatt a $d'$-ről levágott $d$ mindjárt hozzáragasztandó $a$-hoz, majd $d$-hez a $c$ lap is (a jobb oldali oktaédercsúcs körüli 4 lap így $d$, $c$, $c'$, $d'$ sorrendben összefüggő és kiteríthető), továbbá az $A-4-F$ összefüggés miatt $a'$ és $b'$ közé vágás jön, de kapcsolatuk megmarad az $a'$, $a$, $d$, $c$, $c'$, $b'$ lapsorozaton át (5. ábra).




*5. ábra*

Nincs szükség más változtatásra, ha a 3-as lap az $F$-en át csatlakozik a maghoz; ha viszont ezt elvágjuk, emiatt $b$ és $c$ összeragasztandók, de ekkor a 3-as és $A$ közti csatlakozás miatt a $b'$ és $c'$ közös élét kell vágnunk, megmarad a hátsó csúcs kiteríthetősége és összefüggősége.

b 2. Ha végül az 1, 2 maghoz $A$-t $F$-et is hajtogatással csatlakoztatjuk, mégpedig $A$-t ismét az 1-es laphoz, akkor $F$-et csak a 2-eshez lehet, különben az oldalkapcsolataitól elvágott 3-assal a $3-F-1-A$ lapnégyes jönne létre, amit már láttunk az $a$) esetekben. Ezzel elvágtuk $A$-t a 2-estől és $F$-et az 1-estől (6. ábra bal oldali része), és a hátralevő 2 vágás egyike a 3-ast, másika a 4-est vágja majd el $A$-tól vagy $F$-től.




*6. ábra*

Látható, hogy az eddig felvágott 5 él együttese önmagába megy át a kockának azzal a 180°-os elfordításával, mely az 1-es és 2-es lapot egymással fölcseréli, ezért a hátralevő 2 vágási él gondolható $2 \cdot 2 = 4$ megválasztási lehetősége közül kettő lényegében azonos. Elég tehát bizonyítanunk a feladat állítását a következő 3 esetben (6. ábra azonos jelű részei):

$\alpha$) a 3-as lap is, a 4-es is $F$-en át csatlakozik a maghoz;

$\beta$) a 3-as az $F$-hez, a 4-es az $A$-hoz csatlakozik;

$\gamma$) a 4-es az $F$-hez, a 3-as az $A$-hoz csatlakozik.

Az oktaéder megfelelő felvágásai a sziromalakzat következő származékai lesznek: $d$-t mindhárom esetben levágjuk $d'$-ről és átragasztjuk $a$-hoz, az $\alpha$) esetben nincs is más alakítani való,

a $\beta$) esetben elvágjuk $b'$-t $a'$-től, viszont hozzáragasztjuk $b$-t $a$-hoz;

a $\gamma$) esetben elvágjuk $b'$-t $c'$-től, viszont hozzáragasztjuk $b$-t $c$-hez.

A b 1. esetben leírtakhoz hasonlóan az oktaédermodell mindig kiteríthető és összefüggő marad.

Sorra vettük a kocka felvágásának minden lehetőségét, mindegyikben igaznak találtuk a feladat állítását; a bizonyítást tehát befejeztük. – Azt is kaptuk, hogy a kocka lényegesen különböző hálózatainak száma $6 + 2 + 3 = 11$.

**II. megoldás.** 1. Először a fölvágott modellnek a föltevésből következő tulajdonságait állapítjuk meg. A modell 12 éléből 7-et fölvágva, 5 éle hajtogathatóan marad. A hálózatnak a síkra kiterített állapotában mindegyik ilyen él két oldalán álló lap középpontjait összekötve, egy 5 élű, 6 csúcsú $H_{\mathrm{I}}$, gráfot kapunk, csúcsai a 6 kockalap középpontjai. (A $H$ betűvel a ***hat****lapú* szabályos testre kívánunk utalni.) A hálózat összefüggősége azt jelenti, hogy bármelyik lapközéppontból bármelyik másikba át lehet menni $H_{\mathrm{I}}$ élei mentén. Ezért $H_{\mathrm{I}}$-et a kocka *lapközéppont–összefüggési gráf*jának nevezzük.

A hálózatnak mint sokszögnek a határvonalait tekintve, a 6 lap együttes kerülete 24 egységnyi (kockaélnyi). Ebből az 5 hajtogatott él $5 \cdot 2 = 10$ egységnyit vesz föl belső osztóvonalakra, a maradó 14 egységnyi pedig a 7 vágott élből ered, mindegyik 2 helyen jelenik meg, ezek határolják a hálózatot. Belső határvonal nem lehet a sokszögben, mert ha volna benne a hálózathoz nem tartozó rész: „lyuk”, ennek szögei derékszögek lennének, oldalai egységnyiek vagy ennek többszörösei, területe egy vagy több kockalapnyi, márpedig egyetlen négyzet körülzárásához is 8 vele egybevágó négyzet szükséges, több, mint ahány lapja a kockának van. Így – az összefüggőség alapján egyetlen határvonal van, ezen bármely pontjából indulva és visszafordulás nélkül haladva, 14 egységnyi út után visszaérünk a kiindulópontba.

Másrészt a hálózat síkba kiteríthető volta alapján minden egyes kockacsúcsba befutó 3 él közül legalább 1 fel van vágva, különben nem szűnnék meg a csúcsba befutó 3 lap egymáshoz képest merevített, térbeli helyzete.

Egybevetve az utóbbiakat, kapjuk, hogy a hálózat kerületét egységszakaszokra bontó 14 pont közt a kockának mind a 8 csúcsa legalább 1-szer előfordul, tehát bármelyik kockacsúcsból bármelyik másikba eljuthatunk felvágott élek mentén haladva. És ez természetesen akkor is érvényes, ha a hálózatot visszahajtogatjuk kockává, vagy még fel sem vágtuk, csak alkalmasan kijelöltük a felvágandó éleket. Eszerint, a modell felületén a 8 csúcsot és a felvágásra kijelölt 7 élt egy $H_{\mathrm{II}}$ gráf szögpontjainak, illetőleg éleinek tekintve, ezt joggal nevezhetjük a *kocka felvágási gráfjá*nak is és a *kockacsúcsok* bejárási, *összefüggési gráfjá*nak is.

A továbbiakban $H_{\mathrm{I}}$-et is a hálózatból visszaállított kockamodellen tekintjük.

2. A kívánt bizonyítás más oldalról való előkészítéséül bizonyítás nélkül kimondjuk a kockánk és oktaédereink kölcsönös helyzetéből adódó alábbi kapcsolatokat; bizonyításuk átgondolását az olvasóra hagyjuk.

Kockánk $O$ középpontja egyszersmind oktaéderünknek is középpontja.

Bármely az $O$-ból induló félegyenes mindkét poliéder határfelületét egy-egy pontban metszi; más szóval: e két pont egymás vetülete a másik poliéderen, $O$-ból való centrális vetítés mellett.

Amint a kocka lapközéppontjainak az oktaéderen levő vetületei az utóbbinak a csúcsai (hiszen rendre azonosak), hasonlóan az oktaéder lapközéppontjainak a kockán levő vetületei a kocka csúcsai.

Az oktaéder egy élének a kockán levő vetülete olyan két egyenesszakaszból álló törött vonal, mely a kocka két szomszédos lapjának középpontját köti össze, a köztük levő él felezőpontjában megtörve.

A kocka egy élének az oktaéderen levő vetülete olyan két egyenesszakaszból álló törött vonal, mely az oktaéder két szomszédos lapjának középpontját köti össze, a köztük levő él felezőpontjában megtörve.

3. Tekintsük mármost az oktaédermodell 6 csúcsát, valamint az előírás szerint felvágandó 5 élét egy $N_{\mathrm{I}}$ gráf szögpontjainak, illetve éleinek (az $N$ betűvel a *nyolclapú* szabályos testre utalunk) és nevezzük az *oktaéder felvágási gráfjá*nak.

Az előírás szerint $N_{\mathrm{I}}$ és a kockalapközéppontok $H_{\mathrm{I}}$ összefüggési gráfja egymás vetületei. Mivel $H_{\mathrm{I}}$ szögpontjai közt szerepel a kocka összes lapközéppontja, azért $N_{\mathrm{I}}$, szögpontjai közt szerepel az oktaéder összes csúcsa. Eszerint az oktaédermodell mindegyik csúcsába befutó élek közül legalább 1 fel van vágva, vagyis mindegyik csúcsába befutó 4 lap – ha a többi 4 laptól eltekintünk – síkba kiteríthető.

Ahhoz, hogy a 8 oktaéderlap együttese is kiteríthető, még egy megállapítást teszünk. Az $N_{\mathrm{I}}$ gráf 5 élét egyenként tekintve, 10 végződésük eloszlik az oktaéder 6 csúcsára és mindegyikbe legalább 1 végződés fut be. Ezért 1-nél több befutás legföljebb $10-6=4$ csúcsban lehet, és továbbmenve legalább $6-4=2$ csúcsba csak 1 végződés fut be (mint egy zsákutca). Kezdjük az oktaéderlapok kiterítését az $N_{\mathrm{I}}$-nek egyik ilyen végpontja, a $C_1$ körüli 4 lappal. Már csak arra hivatkozunk, hogy $H_{\mathrm{I}}$ összefüggő volta alapján $N_{\mathrm{I}}$ is összefüggő (a vetítés megtartja az összefüggőséget), ennek alapján $C_1$ környezete után kiteríthető az $N_{\mathrm{I}}$-beli $C_2$ szomszédjának környezete és így tovább, az oktaéder mindegyik csúcsának környezete, vagyis a felvágott modell egésze.

Meg kell azonban mutatnunk, hogy az ilyen kiterítés összefüggő, hiszen $N_{\mathrm{I}}$-en haladva a fentiek szerint eljutunk 1-nél több élű szögpontjába, ekkor a megfelelő csúcsba befutó élek közül legalább 2 van felvágva, és ezért a csúcs körüli 4 lap közt van olyan kettő, amelyek csak a további 4 lapon át függnek össze egymással. Tekintsük evégett a fenti $H_{\mathrm{II}}$ (kockacsúcs-összefüggési) gráfnak az oktaéderen levő vetületét is egy $N_{\mathrm{II}}$ gráfnak. Ennek szögpontjai tehát a 8 lapközéppont és mindegyik éle olyan két szomszédos lap középpontját köti össze (közös élük felezőpontján át), amelyek közti oktaéderél nincs felvágva, hiszen a neki megfelelő kockaél – mint $H_{\mathrm{II}}$-nek éle – fel van vágva. És mivel $H_{\mathrm{II}}$ összefüggő, azért $N_{\mathrm{II}}$ is, és $N_{\mathrm{II}}$ mentén az oktaédermodell kiterítettje is összefüggő. A probléma állítását ezzel bebizonyítottuk.

Összeállítva *Göndőcs Ferenc, Komjáth Péter* és *Szabó György* dolgozataiból.

*Megjegyzések.* 1. Tulajdonképpen azt is bebizonyítottuk a fentiekkel, hogy fordítva, minden kiteríthető és összefüggő oktaéderhálózathoz is tartozik egy kiteríthető és összefüggő kockahálózat. Így – az I. megoldást is figyelembe véve – a különböző kockahálózatok és különböző oktaéder hálózatok száma egyaránt 11.

2. Felhasználható a bizonyítás befejezésében az is, hogy gráfjainkban nincs ún. *körút*, vagyis olyan részük, amelyen egy szögpontból egy másikba olyan két úton lehetne eljutni, melyek egyetlen élt sem tartalmaznak közösen. $H_{\mathrm{II}}$-re ez így adódik: ha volna benne körút, ez elvágná egymástól a kocka felületének azt a két részét, amely jobb és bal kezünk felől esnék, míg a körutat egyszer körüljárjuk, így pedig a kiterítés nem lenne összefüggő. $N_1$ pedig azért körútmentes, mert ha a fentiek szerinti „zsákutca”-éleit elhagyjuk, legföljebb 3 éle maradna körút céljára, ezek pedig elvágnák az általuk határolt oktaéderlapot a többiektől.