

I. megoldás. A harmonikus csoport definíciójában x_1 és x_2 , továbbá x_3 és x_4 szerepe szimmetrikus, akár az egyik, akár a másik párt, akár mindkettőt fölcserélve a bal oldal változatlan marad. Más indexcserék esetén viszont a kifejezés értéke megváltozik.

I. Bontsuk föl az egyenlet bal oldalát két másodfokú polinom szorzatára, melyeknek zérushelyei x_1 és x_2 , illetve x_3 és x_4 :

$$(2) \quad x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = (x^2 - px + q)(x^2 - p'x + q'),$$

ahol tehát

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = p, & x_3 + x_4 = p', \\ x_1x_2 = q, & x_3x_4 = q'. \end{cases}$$

Föltettük, hogy $a = 1$, ami csak azt jelenti, hogy b/a , c/a , d/a , e/a helyett rendre (új) b , c , d , e betűt írtunk; ezáltal sem a gyökök nem változtak meg, sem a determináns 0 vagy nem 0 volta, mert az új determináns értéke az eredetiének $1/a^3$ része (mind a három sorból kiemelünk $1/a$ -t).

Az együtthatók összehasonlításából

$$(4) \quad p + p' = -4b,$$

$$(5) \quad q + q' + pp' = 6c,$$

$$(6) \quad pq' + p'q = -4d,$$

$$(7) \quad qq' = e.$$

Ennek a rendszernek 3 megoldása van, hiszen pl. az α , β , γ , δ számok 3-féleképpen rendezhetők két párba, α párjának egymás után β -t, γ -t, végül δ -t véve. Azáltal azonban, hogy x_1 , x_2 , x_3 , x_4 -et harmonikus csoportnak tesszük fel – ami már nem engedi meg a négy gyök tetszés szerinti indexelését –, a megoldást egyértelművé tesszük. A definíció szerinti kapcsolatból átrendezéssel, majd (3) felhasználásával

$$(8) \quad 2(x_1x_2 + x_3x_4) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0, \quad 2(q + q') - pp' = 0.$$

Ennek alapján (5) helyére két egyenletet írhatunk, vagy csak p vagy csak q betűkkel:

$$(5') \quad pp' = 4c,$$

$$(5'') \quad q + q' = 2c.$$

Mármost p és p' a (4) és (5') alapján, q és q' pedig (5'') és (7) alapján rendre a következő két egyenlet gyökei:

$$p^2 + 4bp + 4c = 0, \quad q^2 - 2cq + e = 0,$$

vagyis

$$\begin{aligned} p &= -2 \left(b + \varepsilon \sqrt{b^2 - c} \right), & p' &= -2 \left(b - \varepsilon \sqrt{b^2 - c} \right), \\ q &= c + \delta \sqrt{c^2 - e}, & q' &= c - \delta \sqrt{c^2 - e}, \end{aligned}$$

ahol ε és δ értéke egymástól függetlenül $+1$ vagy -1 .

Ezeket a még hátra levő (6)-ba helyettesítve, majd kifejtve, rendezve

$$(9) \quad \begin{aligned} & \left(b + \varepsilon \sqrt{b^2 - c} \right) \left(c - \delta \sqrt{c^2 - e} \right) + \left(b - \varepsilon \sqrt{b^2 - c} \right) \left(c + \delta \sqrt{c^2 - e} \right) = 2d, \\ & -\varepsilon \delta \sqrt{b^2 - c} \cdot \sqrt{c^2 - e} = d - bc, \end{aligned}$$

végül négyzetre emeléssel, rendezéssel

$$(9') \quad (b^2 - c)(c^2 - e) = (d - bc)^2,$$

$$(10) \quad ce + 2bcd - c^3 - d^2 - b^2e = 0,$$

ez szükséges feltétele annak, hogy teljesüljön (2), (3) és (8), más szóval, hogy x_1 , x_2 , x_3 , x_4 az (1) gyökei legyenek és ebben a sorrendben harmonikus csoportot alkossanak.

És mivel a feltételbeli determinánst kifejtve éppen (10) bal oldalát kapjuk ($a = 1$), azért a determináns eltűnése valóban szükséges feltétel.

II. Tegyük fel – megfordítva –, hogy a determináns értéke 0. Ez – mint láttuk ekvivalens (9') teljesülésével, s mivel itt a jobb oldal nem negatív, azért a bal oldali tényezők egyező előjelűek. Így a (9)-beli két négyzetgyök egyformán

vagy valós, vagy tiszta képzetes, tehát ε, δ megválaszthatók úgy, hogy (9) két oldala előjelben is egyezzen. Legyen $\sqrt{b^2 - c}$ egyik, rögzített értéke P , és $\sqrt{c^2 - e}$ -nek az az értéke Q , amelyre $PQ = d - bc$. Ekkor a

$$p = -2(b + P), \quad p' = -2(b - P), \quad q = c + Q, \quad q' = c - Q$$

kifejezésekre (6) ekvivalens (9)-cel, és mint a behelyettesítés mutatja, (4), (5), (7) és (8) mindegyike teljesül. Ha tehát x_1 , és x_2 , ill. x_3 és x_4 rendre a (2) jobb oldala első, ill. második tényezőjének 0 helyeit jelölik, ezek (8) teljesülése alapján harmonikus csoportot alkotnak. Ezzel bebizonyítottuk a kitűzésbeli föltétel elegendő voltát.

Komjáth Péter, Papp Zoltán

II. megoldás. Jelöljük az $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$ kifejezés értékét K -val, a feladatban szereplő determinánst Δ -val, értékét pedig D -vel. Azt kell megmutatnunk, hogy K és D értéke egyszerre 0 vagy egyszerre nem 0, ha x_1, x_2, x_3, x_4 a Δ -ban szereplő együtthatókkal felírt egyenlet gyökei.

Ha a gyökökből levonunk egy t számot, vagyis őket az

$$(11) \quad x'_1 = x_1 - t, \quad x'_2 = x_2 - t, \quad x'_3 = x_3 - t, \quad x'_4 = x_4 - t$$

számokkal helyettesítjük, akkor K értéke nyilván változatlan marad. Vizsgáljuk meg, hogyan változik meg D értéke a (11) transzformáció hatására. A (11) alatti gyökök az

$$a(x - t)^4 + 4b(x - t)^3 + 6c(x - t)^2 + 4d(x - t) + e = 0$$

egyenlet gyökei, a (11) transzformáció tehát az együtthatókra az

$$(12) \quad \begin{aligned} a' &= a, \\ b' &= -at + b, \\ c' &= at^2 - 2bt + c, \\ d' &= -at^3 + 3bt^2 - 3ct + d, \\ e' &= at^4 - 4bt^3 + 6ct^2 - 4dt + e \end{aligned}$$

transzformációt jelenti. Az új együtthatókkal felírt Δ' determináns értéke megegyezik az eredeti determináns értékével, hiszen ha Δ első oszlopának t -szeresét levonjuk a második oszlopból, majd az új második oszlop $(-2t)$ -szeresét, és az első oszlop $(-t^2)$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik oszlophoz, akkor az

$$\begin{vmatrix} a & b - at & c - 2bt + at^2 \\ b & c - bt & d - 2ct + bt^2 \\ c & d - ct & e - 2dt + ct^2 \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk. Ennek első sorának t -szeresét levonva a 2. sorból, majd az új második sor $(-2t)$ -szeresét és az első sor $(-t^2)$ -szeresét a harmadik sorhoz hozzáadva Δ' -t kapjuk.

Válasszuk t -nek x_4 -et, ekkor x'_4 értéke 0 lesz, elegendő tehát azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $x_4 = 0$, hiszen ha ez nem volna így, a fenti transzformációval olyan egyenletet kapunk, melyben az egyik gyök 0, és K, D értéke e transzformáció alatt változatlan marad. Ekkor

$$K = (x_1 - x_3)x_2 + x_1(x_2 - x_3) = 2x_1x_2 - x_3(x_1 + x_2),$$

és $e = 0$ miatt

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = 2bdc - c^3 - ad^2$$

Az x_1, x_2, x_3 számok az

$$(13) \quad ax^3 + 4bx^2 + 6cx + 4d = 0$$

harmadfokú egyenlet gyökei. Ha van a gyökök között 0-val egyenlő, akkor $d = 0$, és $D = 0$ csak akkor lehet, ha még $c = 0$ is teljesül. Ekkor tehát van (13)-nak még egy, 0-val egyenlő gyöke. Megmutatjuk, hogy ekkor $K = 0$. Valóban, ha $x_1 = x_2 = 0$, vagy $x_1 = x_3 = 0$, vagy $x_2 = x_3 = 0$, akkor K értéke mindig 0.

Megfordítva, ha van a gyökök között 0, akkor $K = 0$ csak úgy lehet, ha $c = 0$, hiszen a gyökök és együtthatók összefüggése alapján

$$\frac{6c}{a} = x_1x_2 + x_3(x_1 + x_2) = 3x_1x_2 - K.$$

Ha $x_3 = 0$, akkor $K = 0$ miatt $x_1x_2 = 0$, és $c = 0$, ha pedig x_1 vagy x_2 értéke 0, akkor nyilván $c = 0$.

Ezzel beláttuk, hogy ha van a gyökök között 0, akkor K és D értéke egyszerre 0. Ha nincs a gyökök között 0, akkor K értéke akkor és csak akkor 0, ha

$$x_3 = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2},$$

vagyis ha x_3 az x_1 és x_2 harmonikus közepe. Az 1701. feladatban¹ beláttuk, hogy ez akkor és csak akkor 0, ha $D = 0$,

¹Lásd K. M. L. 41 (1970) 205. o.

feladatunk megoldását befejeztük.