

I. megoldás. Nyilvánvaló, hogy minden n esetére az a_n -nél nagyobb b_n számot kapunk, ha a közös 2 alap fölé mindenütt nagyobb kitevőt írunk. Legyen b_n kifejezésében a kitevő az a_n belüli

$$(1) \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots, \quad n-1, \quad n$$

helyén rendre a következő:

$$(2) \quad 2^0 + 1, \quad 2^1 + 1, \quad 2^2 + 1, \quad \dots, \quad 2^{n-1} + 1, \quad 2^n + 2$$

(vagyis az utolsó kitevő második tagja 2, az előbbieké 1), tehát

$$b_n = \sqrt{2^{2^0+1} + \sqrt{2^{2^1+1} + \dots + \sqrt{2^{2^{n-1}+1} + \sqrt{2^{2^n+2}}}},$$

és

$$a_n < b_n.$$

A kapott b_n számok közös értéke viszon $\sqrt{8}$ ez tehát az a_n számoknak egy közös korlátja. Valóban, a legbelső, az $(n+1)$ -edik négyzetgyök egyenlő a közvetlen előtte álló taggal, hiszen a gyök alatti kitevő kétszer akkora, mint a közvetlen előtte álló tagé; így az n -edik gyökkel alatt e tag 2-szerese,

$$2^{2^{n-1}+2}$$

áll. A további gyökkvonások során ugyanez ismétlődik, és még $n-1$ gyökkvonást végrehajtva

$$b_n = \sqrt{2^{2^0+2}} = \sqrt{8},$$

függetlenül az n -től.

Azt kell már csak igazolnunk, hogy a (2) kitevősorozat minden egyes tagja nagyobb az (1)-beli megfelelőjénél, azaz ha $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor

$$2^k + 1 > k.$$

Ez $k = 0, 1, 2$ esetén igaz. Ha pedig valamely k -ra teljesült, akkor a következőre

$$2^{k+1} + 1 = 2 \cdot 2^k + 1 > 2(k-1) + 1 = (k+1) + (k-2) \geq k+1,$$

és ezt akartuk megmutatni.

Göndöcs Ferenc

II. megoldás. Jelöljük az a_n -beli (előlről számítva) k -adik gyökkel alatti kifejezést L_k -val. Megmutatjuk, hogy $n+1 \geq k \geq 3$ esetén

$$(3) \quad L_k < 2^k.$$

Ez $k = n+1$ -re igaz, mert $L_{n+1} = 2^n < 2^{n+1}$. Ha mármost (3) teljesül egy k -ra ($k \geq 3$), akkor

$$L_{k-1} = 2^{k-2} + \sqrt{L_k} \leq 2^{k-2} + 2^{\frac{k}{2}} \leq 2^{k-2} + 2^{k-2} = 2^{k-1},$$

hacsak

$$\frac{k}{2} \leq k-2, \quad \text{azaz} \quad k-1 \geq 3,$$

amint állítottuk.

Eszerint pedig

$$a_n < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2^3}}} < \sqrt{1 + \sqrt{5}} < 2,$$

amint a feladat állítja.

Papp Zoltán

III. megoldás. Az a_n számsorozat szigorúan monoton növekvő, minden egyes tagja nagyobb az előtte állónál: $a_{n+1} > a_n$, mert bennük a (kívülről számított) $n+1$ -edik négyzetgyökkel alatt rendre

$$2^n + \sqrt{2^{n+1}}, \quad \text{ill.} \quad 2^n$$

áll, ahol a nagyságviszony nyilvánvaló, és ebből a két számból már ugyanazokkal a lépésekkel haladunk: a_{n+1} és a_n kiszámításában és a váltakozva végzett négyzetgyökkvonások és ugyanazon szám hozzáadásai ezt a nagyságviszonyt változtatlanul hagyják. Eszerint ha $n > 1$, akkor $a_n > a_1 = 1$.

Megmutatjuk másrészt, hogy

$$a_{n+1} < \sqrt{1 + \sqrt{2}a_n}.$$

Szorozzuk meg evégett a_n -et $\sqrt{2}$ -vel a következő módon. Az első gyökjel alatti tagokat 2-vel, de a második tag, a négyzetgyök alá vigyük be a szorzót, ott tehát 2-nek már a négyzetével szorzunk, hasonlóan a harmadik gyökjel alatt a $2 \cdot 2 = 4$ -ik hatványával, és így tovább, az $(n+1)$ -edik négyzetgyökjel alatt már 2^{2^n} lesz a szorzó. Ezáltal $\sqrt{1 + \sqrt{2}a_n}$ -nek $(n+2)$ gyökjelet tartalmazó kifejezése:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 \cdot 1 + \sqrt{2^2 \cdot 2 + \sqrt{2^{2^2} \cdot 2^2 + \dots + \sqrt{2^{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} + \sqrt{2^{2^n} \cdot 2^n}}}}}}},$$

vagyis a $(k+2)$ -edik gyökjel alatti első tag $(k+2 \geq 2)$:

$$2^{2^k} \cdot 2^k = 2^{k+2^k}.$$

Ezzel szemben a_{n+1} -nek a $(k+2)$ -edik gyökjele alatti első tag a definíció szerint

$$2^{k+1},$$

és mivel a kitevők között nyilvánvalóan fennáll a

$$k + 2^k > k + 1$$

egyenlőtlenség, ha $k > 0$, azért valóban

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}a_n} > a_{n+1},$$

és a_n monoton növekedése alapján

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}a_n} > a_n.$$

Innen négyzetreemeléssel (hiszen $a_n > 0$), átrendezéssel

$$a_n - \frac{1}{a_n} < \sqrt{2}.$$

Végül mivel $a_n > 1$, és így

$$0 < \frac{1}{a_n} < 1, \quad \text{azért} \\ a_n - 1 < a_n - \frac{1}{a_n} < 2,$$

tehát

$$a_n < 1 + \sqrt{2}.$$

(A most kapott felső korlát nagyságra nézve az I. és II megoldásban kapottak között áll.)

Földvári Csongor