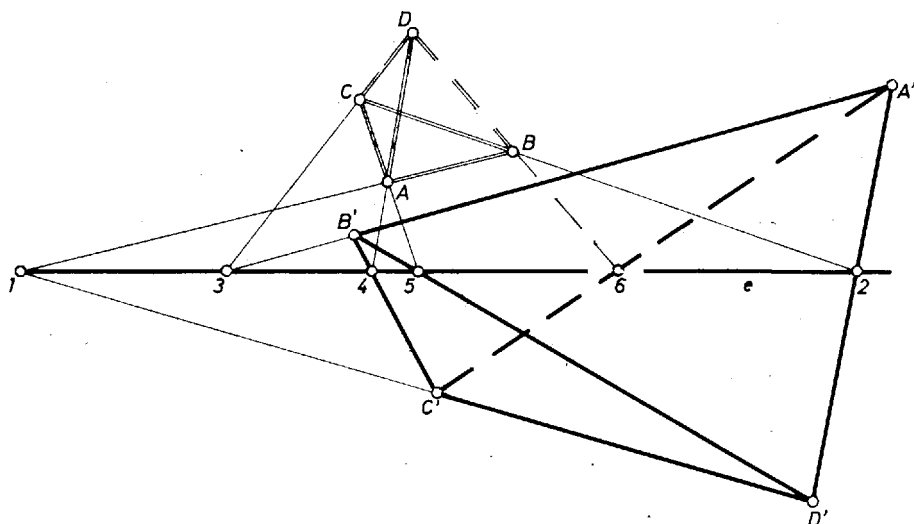
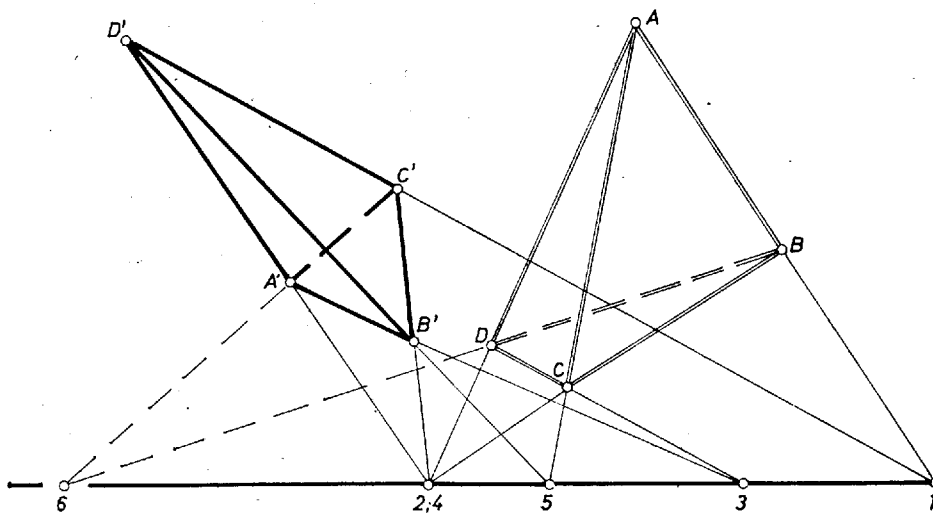


Az 1 – 3. ábrák különböző fölvételekben mutatják be a feladat föltevéseit és állítását.



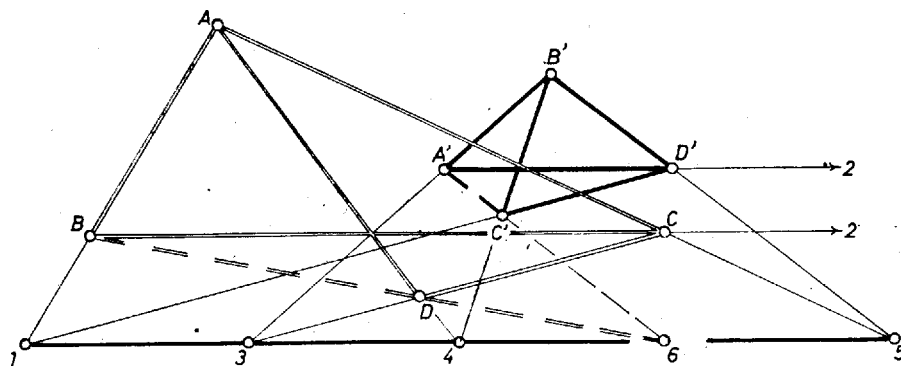
1. ábra

Megjegyezzük, hogy konvexség nincs föltételezve a négyszögekről. így az „oldal” „átló” nevek használatának nincs helye; e természetesen át is haladhat a négyszögeken.



2. ábra

A speciális föl vételű 2. ábrán az (1)-beli második és negyedik metszés pont egybeesik; a 3. ábrán pedig BC és $A'D'$ az e -vel párhuzamosak, ekkor is igaznak mutatja az állítást a szemlélet.



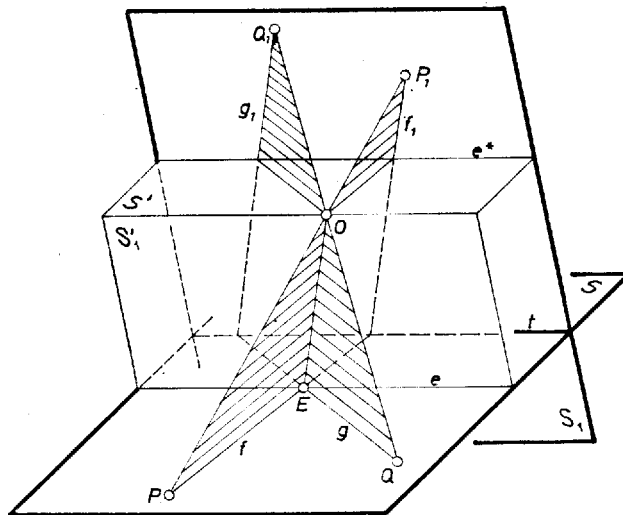
3. ábra

– Belátjuk viszont mindjárt most, hogy négyszögeinknek – amennyiben nem elfajult négyszögek – magán az e egyenesen nem lehet rajta egy szög pontjuk sem. Ha ugyanis pl. A volna rajta az e -n - vagyis az (1)-ben háromszor

szereplő pontok egyike –, akkor itt metszené e -t az AB , AC , AD egyenes és ezek révén a $C'D'$ és $B'D'$, végül a $B'C'$ egyenes is, így C' , D' és B' vagy egy egyenesen volnának, vagy egybe is esnének A -val, vagyis az $A'B'C'D'$ négyszög mindenképpen elfajult volna. Ha pedig B volna e -n – vagyis az (1)-ben csak kétszer szereplő pontok egyike –, akkor itt metszené e -t BA és $C'D'$, valamint BC és $D'A'$, tehát hasonlóan D' azonos volna B -vel, márpedig D' az (1)-ben azonos szerepű A -val, tehát ez sem lehetséges. (Ha valamelyik négyszögnek két szögpontja volna rajta e -n, akkor az (1) metszések közül a megfelelő határozatlan lenne.)

2. A bizonyítás céljára térbeli vetítéssel a két négyszög és az e egyenes alakzatáról olyan képet állítunk elő, egy, az eredeti síkot metsző síkon, amelyben az (1) egyenespárok elemei páronként párhuzamosak. Ezután bebizonyítjuk, hogy a kérdéses BD , $A'C'$ egyenesek képei is párhuzamosak. Ebből az eredményből az állítás igaz voltát a vetítés tulajdonságai alapján fogjuk kikövetkeztetni.

Legyen O egy, az alakzatunk S síkján kívül álló pont és S_1 egy, az O és e által meghatározott S'_1 síkkal párhuzamos, de attól különböző, rögzített sík. Egy S -beli P pont P_1 képét az OP egyenes (a vetítő sugar) S_1 -en lévő dőléspontjaként értelmezzük (4. ábra).



4. ábra

P_1 akkor és csak akkor nem létezik, ha P rajta van e -n (ekkor OP párhuzamos S_1 -gyel); különben P_1 egyértelműen létrejön. – Fordítva, P_1 képe P , és S_1 minden Q_1 pontjának S -beli képe egyértelműen az QQ_1 egyenes által kimetszett Q pont, kivéve annak az e^* egyenesnek a pontjait, amelyet az O -n át S -sel párhuzamosan fektetett S' sík metsz ki S_1 -ből, ezeknek a pontoknak nincs képe ebben a leképezésben (ekkor QQ_1 párhuzamos S -sel).

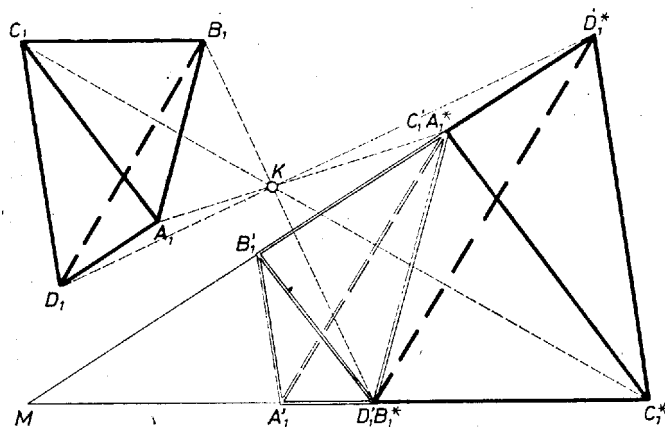
Továbbmenve, ha az S -nek f és g egyenesei az e -n levő E pontban metszik egymást, akkor f_1 , g_1 képek párhuzamosak, hiszen nyilvánvalóan át kellene menniük E képén, E -nek viszont nincs képe. (Másképpen: f és g vetítősíkjai az OE egyenesben metszik egymást, ez párhuzamos S_1 -gyel, tehát a vetítősíkoknak S_1 -gyel alkotott metszésvonalai, a képek is párhuzamosak. Egyébként f és f_1 az S -nek és S_1 -nek t metszésvonalán metszik egymást.) Hasonlóan látható be, hogy akkor is párhuzamosak f és g képei, ha mindkettő párhuzamos e -vel, és különböző tőle; ekkor f_1 és g_1 párhuzamosak t -vel ($t \parallel e$).

Fordítva: ha f_1 és g_1 az S_1 -ben egymással párhuzamos, de S -sel nem párhuzamos egyenesek, akkor ezek képei e -n metszik egymást, mert az O , f_1 és O , g_1 vetítősíkok metszésvonalai párhuzamos S_1 -gyel, benne van S'_1 -ben, tehát metszi e -t, és a metszésponton átmegy az f , ill. a g kép. Ha pedig f_1 és g_1 az S_1 -nek S -sel, azaz t -vel párhuzamos egyenesei, akkor ezek S -beli f és g képe párhuzamos egymással és e -vel.

3. A legutóbbiak, valamint a feladat föltevéséi és az 1. pontbeli megjegyzés szerint az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyszögek csúcsainak $A_1, B_1, \dots, D'_1$ képei a végesben vannak és

$$(2) \quad A_1B_1 \parallel C'_1D'_1; B_1C_1 \parallel D'_1A'_1; C_1D_1 \parallel A'_1B'_1; D_1A_1 \parallel B'_1C'_1; A_1C_1 \parallel B'_1D'_1$$

(5. ábra).



5. ábra

Tekintsük az első kapcsolat alapján azt a hasonlósági transzformációt, mely A_1 -et C_1' -be és B_1 -et D_1' -be viszi át; ennek középpontja az A_1C_1' és B_1D_1' egyenesek K metszéspontja – amennyiben létezik. (Ez a nyújtás vagy zsugorítás természetesen a K -ra való tükrözést is tartalmazhatja, ilyenkor a nagyítási arányszám negatív.) Legyen C_1 , D_1 képe ebben a hasonlóságban C_1^* , D_1^* (továbbá C_1' egyben A_1^* és D_1' egyben B_1^*), (2) szerint C_1^* az $A_1'D_1'$ egyenesen, D_1^* pedig a $B_1'C_1'$ egyenesen van.

Az $A_1'D_1'$ és $B_1'C_1'$ egyenesek általában metszik egymást egy M pontban. Alkalmazzuk ebben az esetben a párhuzamos szelők tételét az M csúcsú szög száraitra és egyrészt a $B_1'D_1'$, $A_1^*C_1^*$ szelőkre (amelyek párhuzamosak egymással, hiszen mindkettő párhuzamos A_1C_1 -gyel), másrészt az $A_1'B_1'$, $C_1^*D_1^*$ szelőkre:

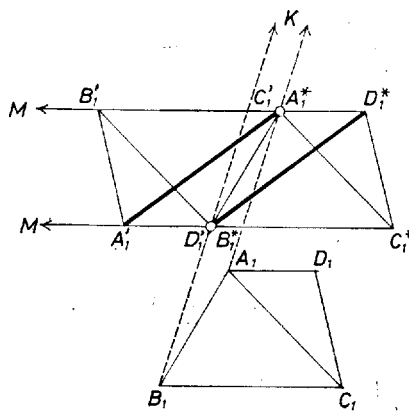
$$\frac{MB_1^*}{MB_1'} = \frac{MC_1^*}{MC_1'}, \quad \text{illetve} \quad \frac{MB_1'}{MA_1'} = \frac{MD_1^*}{MC_1'}.$$

Ezeket összeszorozva

$$\frac{MB_1^*}{MA_1'} = \frac{MD_1^*}{MC_1'},$$

ami ugyanazon tétel szerint azt jelenti, hogy a $B_1^*D_1^*$ egyenes párhuzamos az $A_1'C_1'$ egyenessel. Hasonlósági transzformációnk szerint viszont $B_1^*D_1^* \parallel B_1D_1$ tehát $B_1D_1 \parallel A_1'C_1'$. Ez pedig a 2. pont utolsó megállapításai szerint a feladat állítását bizonyítja, ha B_1D_1 nem párhuzamos t -vel, akkor BD és $A'C'$ az e -n metszik egymást, ha pedig $BD \parallel t$, akkor $BD \parallel A'C' \parallel e$. (A bizonyításban (2)-nek mindegyik kapcsolatát felhasználtuk.)

Az iménti M pont csak akkor nem jön létre, ha $A_1'D_1' \parallel B_1'C_1'$ (6. ábra), azaz ha (2) szerint B_1C_1 is, D_1A_1 is párhuzamos velük.



6. ábra

Ekkor, mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak, a $D_1C_1A_1$ háromszög hasonló az $A_1'B_1D_1'$ háromszöghöz, a $D_1^*C_1^*A_1^*$ háromszög pedig egybevágó az utóbbival, hiszen az egymásnak megfelelő C_1^* ill. B_1' csúcsból induló magasságuk egyenlő. Így pedig $D_1^*A_1^* \equiv D_1^*C_1^* \# D_1'A_1' \equiv B_1^*A_1'$, tehát $D_1^*C_1^*A_1^*B_1^*$ paralelogramma, és $A_1'C_1' \parallel B_1^*D_1^* \parallel B_1D_1$; ezzel az állítást ilyen esetre is bebizonyítottuk. (Az $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ helyzet azt jelenti, hogy S -ben AD és BC ugyanabban a pontban metszik e -t, és az egyszersmind a $B'C'$ és $A'D'$ egyeneseknek is a metszéspontja, 2. ábra.)

A felhasznált K hasonlósági középpont pedig csak akkor nem létezik, ha $A_1C_1' \parallel B_1D_1'$. Ekkor $A_1B_1D_1'C_1'$ paralelogramma, és A_1B_1 (és vele $A_1B_1C_1D_1$) translációval (egybevágósági transzformációval) vihető át $C_1'D_1'$ -be (ill. $A_1'B_1C_1'D_1'$ mellé; a 6. ábra egyszersmind erre is példát mutat).

4. Mindezek szerint a feladat eredeti alakzatának O -n át S_1 -be vetítésével arra az esetre is bebizonyítottuk az állítást, ha az (1) egyenespárok közt van az e -vel párhuzamos pár is. (Legföljebb két ilyen pár lehet, mert pl. A , B , C és D mindegyikén át a szóban forgó 3 – 3 egyenes közül csak egy lehet párhuzamos e -vel.)

Megjegyzés. A feladat állítása ekvivalens a következővel: négy pont (a síkon), melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, 6 egyenest határoz meg, ezek közül 5-nek egy adott (egyik adott ponton sem átmenő) egyenessel való metszéspontjai egyértelműen meghatározzák a hatodik egyenesnek az adott egyenessel való metszéspontját. Erre az állításra közvetlen bizonyítások is adhatók.