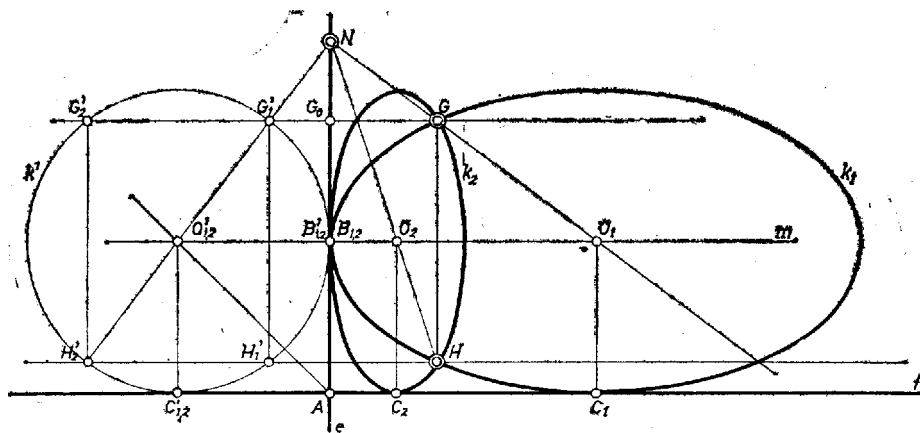


Jelölje a két egyenest e és f , metszéspontjukat A , a két adott pontot G és H , a GH egyenes metszéspontját e -vel E , f -fel F (legalább az egyikük létezik). Nyilvánvalóan csak akkor lehet szó megoldásról, ha G és H az egyenesek alkotta négy síknegyed közül ugyanabba esik, ezt tehát fölteszük. Elég megszerkesztenünk a keresett k ellipszisnek e -vel és f -vel való B , ill. C érintkezési pontját, mert ekkor O középpontja az e -re B -ben és f -re C -ben emelt merőlegesek metszéspontja, hiszen az ellipszis tengelyeinek végpontjában az érintő merőleges az illető tengelyre; a B , C , O ponthármassal k -t meghatározottnak vesszük.

Tekintsük k képét az e tengelyű merőleges affinitásokban, az affinitás λ arányszámát változtatva. Jobb áttekintés érdekében csak az e másik partján keletkező képekre szorítkozunk, azaz ha $\lambda < 0$. Így O képe az e -re merőleges egyenesen mozog és ha $-\lambda = OC/OB$, akkor k képe egy k' kör lesz, melynek sugara egyenlő OC -vel. (Értelemszerűen ugyanezek mondhatók az f tengelyű merőleges affinitásokban is k képeiről.)

Már ezek alapján könnyen célhoz érünk minden olyan esetben, ha a GH szakasz párhuzamos az adott egyenesek egyikével, mondjuk e -vel. Ilyenkor ugyanis affin képe, $G'H'$ is párhuzamos e -vel, és a kép felező merőlegese – ami azonos magának a GH szakasznak m felező merőlegesével, hiszen $G'H'$ a GH -ból f irányú alkalmas eltolással is előállítható – kimetszi e -ből B -t; továbbmenve k' -nek O' középpontját m -ből kimetszhetjük az e , f egyenespárnak azzal a szögfelezőjével, amely a G' -t tartalmazó síknegyedben halad, és így k' az O' középpű, $O'B$ sugarú kör (1. ábra).



1. ábra

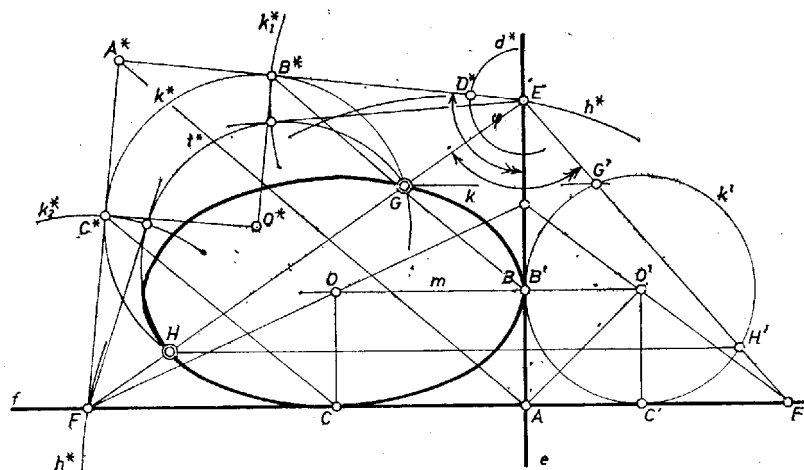
k' -ből a G -nek (és H -nak is) két megfelelőjét metszi ki a rajta átmenő, e -re merőleges egyenes: G'_1 -et¹ és G'_2 -t (azaz pl. $-\lambda_1 = G'_1 G_0 / GG_0$, ahol G_0 a G vetülete e -re), a két megoldásra tekintettel írtuk O' helyére az $O'_{1,2}$ jelet. Mármint a megfelelő két ellipszis O_1 , O_2 középpontját m -en úgy kapjuk, hogy G -t, ill. H -t összekötjük a körrendszerbeli $O'_1 G'_1$, ill. $O'_2 H'_2$ egyenesnek e -n levő (közös) N pontjával, végül O_1 , O_2 vetülete f -en C_1 , ill. C_2 .

A továbbiakban fölteszük, hogy E és F mindegyike létezik, és G , H közöttük levő (különböző) pontok. Ha feladatunkat úgy módosítanánk, hogy egyrészt az adott e és f helyett egy-egy az E -n, ill. F -en átmenő egyenest kelljen szerkeszteni úgy, hogy merőlegesen álljanak egymásra – ami természetesen a követelmény lazítása –, másrészt ellipszis helyett kört kelljen szerkeszteni – ami viszont megszigorítása a követelménynek –, akkor éppen a P. 39. problémával állnánk szemben.² Megmutatjuk, hogy feladatunk e két módosítást követve visszavezethető a P. 39-beli szerkesztésre.

Legyen G , H és F képe egy e tengelyű és k -t egy k' körbe vivő (k' az e túlsó oldalán) merőleges affinitásban rendre G' , H' , F' ; ezek egy, az E -n átmenő egyenesen vannak, mert egyenes affin képe egyenes. Másrészt $GG' \parallel HH' \parallel FF'$, mert merőlegesek e -re, így a párhuzamos szelők tétele alapján az $EG' : EG$, az $EH' : EH$ és az $EF' : EF$ arányok egyenlők, jelöljük közös értéküket μ -vel (2. ábra).

¹ A logikai sorrendnek megfelelően a G'_1 jelet ezúttal így célszerű kiolvasni: (nagy) g' és vessző egy.

² Lásd a megoldást K. M. L. 40 (1970) 74. o.



2. ábra

Ez azt jelenti, hogy a mondott affinitás inverzén túl ismerünk még egy olyan transzformációt, mely az E, G', H', F' pontokat rendre E -be, G -be, H -ba, F -be viszi vissza, és pedig az a forgatva nyújtás ez, melynek középpontja E , nyújtási arányszáma μ , elfordítási szöge pedig akkora és olyan irányú, amely az EF' félegyenest EF -be viszi át. (Ez a transzformáció k' további pontjait természetesen nem a k ellipszisbe viszi át, hiszen k más pontjaira az arányok értéke nem μ). És mivel k' átmegy G' -n és H' -n, továbbá az affinitás tulajdonságai alapján érinti e -t és f -et, vagyis a hozzá E -ből, F' -ből húzott érintők merőlegesen állnak egymásra, azért k' -nek a mondott forgatva nyújtással keletkező k^* képe a G -n és H -n átmenő kör, és a hozzá E -ből és F -ből húzott érintők merőlegesek egymásra. Ezek pedig azt jelentik, hogy k^* az E, G, H, F pontok ismeretében valóban megszerkeszthető a P. 39-beli eljárás szerint. Az ábrán k^* -ra csak egy megoldást tüntettünk föl, és pedig olyat, amelyre nézve – az E -ből és F -ből húzott, egymásra merőleges EB^*, FC^* érintők metszéspontját A^* -gal jelölve – az EFA^* derékszögű háromszög körüljárása ellentétes irányú az EFA derékszögű háromszög körüljárásával. A P.39-beli t, k_1, k_2, h, d körök és D pont megfelelője rendre $t^*, k_1^*, k_2^*, h^*, d^*, D^*$.

Ezek után a k^* -ból k' -t előállító forgatva nyújtásnak – a fenti megmondolásbeli forgatva nyújtás inverzének – szöge és arányszáma abból adódik, hogy az EA^* szakasz EA -ba jut át. Eszerint B' -t (ami azonos B -vel) kimetszi az A^* A -val párhuzamos, B^* -on átmenő egyenes, O' -t pedig a B -n át e -re állított m merőlegesből az EAF derékszög mellékszögének felezője. F' -t kijelöli az A^*EA és FEF' forgásszögek egyenlősége (az AF szakasz A -n túli meghosszabbításán), végül az e és $F'O'$ közös pontját F -fel összekötő egyenesnek m -mel való, metszése O , és ennek f -en levő vetülete C . Így az EAF' háromszög körüljárása egyező az EA^*F háromszögével, tehát ellentétes az EAF háromszögével, amint a felhasznált affinitás kívánja.

A szerkesztés utóbbi része helyességének bizonyítását az olvasóra hagyjuk, a diszkusszió pedig természetesen azonos a P. 39-ben olvashatóval.

Megjegyzések. 1. A forgatva nyújtás és az affin leképezés eredményeképpen $FC^* : FA^* = F'C' : F'A = FC : FA$, ezért $CC^* \parallel AA^*$ ami BB^* és AA^* föl is használt párhuzamos voltával együtt azt sejteti, hogy a „csillagos” rendszer egyetlen transzformációval, ferde affinitással is átvihető a keresett ellipszis rendszerébe. Ennek teljes kivizsgálását is az érdeklődőkre hagyjuk.

2. Megoldható a feladat koordináta-geometriai számító előkészítéssel is.