

I. megoldás. Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van két olyan szám: a és b , hogy sem a , sem $a + p$, sem b , sem $b + p$ nem áll elő két különböző osztálybeli szám összegeként. Jelölje a közülük a nagyobbikat. Tekintsük azt az osztályt, amelyben a 0 van. Ha akár a , akár b a másikban lenne, akkor a -nak, ill. b -nek nem volna meg a kívánt tulajdonsága (hiszen $0 + a = a$, és $0 + b = b$), ezért a és b a 0-t tartalmazó osztályban van.

Ugyanígy megfontolással, ha ebben az osztályban van x , akkor ebben van $(b - x) \pmod{p}$ is¹ és $\{a - (b - x)\} \pmod{p}$ is. Ezt $x = a - b$ -re alkalmazva adódik, hogy $2(a - b) \pmod{p}$ is a 0-t tartalmazó osztályban van. Hasonlóképpen $x = 2(a - b) \pmod{p}$ -re alkalmazva megint adódik, hogy $3(a - b) \pmod{p}$ is a 0-t tartalmazó osztályban van. Tovább folytatva azt kapjuk, hogy

$$0, \quad (a - b), \quad 2(a - b) \pmod{p}, \quad 3(a - b) \pmod{p}, \quad \dots, \quad (p - 1) \cdot (a - b) \pmod{p}$$

mind egy osztályban vannak.

Megmutatjuk, hogy a fenti p db szám mind különböző. Ha ugyanis valamely $0 \leq k < l \leq p - 1$ -re

$$k(a - b) \pmod{p} = l(a - b) \pmod{p}$$

lenne, akkor p osztaná a $(k - l)(a - b)$ szorzatot, ami lehetetlen, hiszen $0 < |k - l| < p$, $0 < |a - b| < p$.

Tehát a 0-t tartalmazó osztály pontosan p elemű, és így a másik osztály üres. Ellentmondásra jutottunk, így valóban csak egy megadott tulajdonságú a szám lehet.

Göndöcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)

Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladat állítása $p = 2$ -re nyilvánvaló. Ezért a bizonyítás során feltesszük, hogy p páratlan. Legyen a két osztály A és B . Tekintsünk egy olyan a számot, amelyik sem maga, sem $a + p$ nem állítható elő egy A és egy B -beli szám összegeként.

Ha $0 \leq x \leq p - 1$ és x egész, akkor egy és csakis egy $0 \leq y \leq p - 1$ egész létezik, melyre vagy $x + y = a$, vagy $x + y = a + p$ fennáll. Minden x -hez hozzárendeljük az így adódó y -t. Így a $0, 1, \dots, p - 1$ számokat sikerült párokba rendezni. Kivételt képez az az eset, amikor $x = y = \frac{a}{2}$, vagy $x = y = \frac{a + p}{2}$, ezen két eset közül rögzített a -ra csak az egyik következhet be, hiszen vagy $\frac{a}{2}$ vagy $\frac{a + p}{2}$ lesz egész. Így a párok száma $\frac{p - 1}{2}$

A feltevés szerint az egyes pároknak azonos osztályban kell lenniük. Feltehető, hogy pl. A -ban $n_1 \leq \frac{p - 1}{2}$ pár van, és a többi szám B -ben van. Ekkor összeadva az A -beli számokat, eredményül $n_1 a + kp$ adódik, ahol $0 \leq k \leq n_1$. Ha volna még egy ilyen tulajdonságú $b \neq a$ szám, akkor az okoskodást megismételve az adódna, hogy az A -beli számok összege $n_1 b + lp$, ahol ismét $0 \leq l \leq n_1$.

Tehát fennáll, hogy $n_1 a + kp = n_1 b + lp$, azaz

$$n_1(a - b) = (l - k)p.$$

Mivel $a \neq b$ és $|a - b| < p$, ha $l \neq k$, akkor kell, hogy $p|n_1$ legyen, ha pedig $l = k$, akkor $n_1 = 0$ -nak kell fennállni.

Mivel $0 < n_1 \leq \frac{p - 1}{2}$, mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

¹ $u \pmod{p}$ jelentse azt a legkisebb nem negatív számot, mely p -vel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint u . Ekkor fennáll, hogy $0 \leq u \pmod{p} \leq p - 1$.