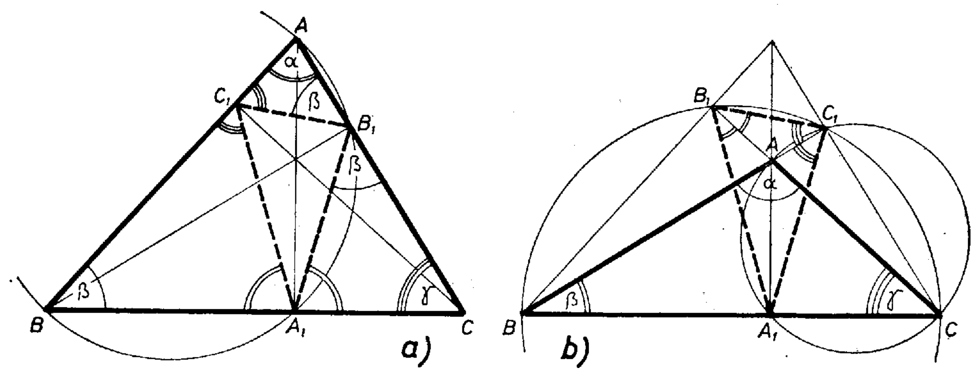
Vizsgáljunk egy K_n szabályos n-szöget, jelölje k_n a körülírt körét, O ennek középpontját, A, B, C pedig K_n három különböző csúcsát. Jelölje továbbá H_0 az ABC háromszöget és legyen H_{k+1} a H_k háromszög talpponti háromszöge ($k = 0, 1, 2, \dots$). Keressük annak feltételét, hogy a H_1, $H_2, \dots$ sorozatban legyen a H_0-hoz hasonló háromszög.

Ha egy háromszög szögei α, β, γ, és ezek mindegyike hegyesszög, akkor a talpponti háromszög szögei rendre $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$, (lásd $1a$) ábra: $CB_1A_1\sphericalangle = \beta$, mert A_1BAB_1 húrnégyszög stb.). Ha a háromszög derékszögű, akkor a talpponti háromszög nem létezik. Tompaszögű háromszögben, ha $\alpha > 90°$, akkor a talpponti háromszög szögei $2\alpha - 180°$, 2β, 2γ (lásd $1b$) ábra: $AC_1A_1\sphericalangle = \gamma$, mert AC_1CA_1 húrnégyszög stb.).



1. ábra

A K_n egy oldalán nyugvó középponti szög $360°/n$, így K_n bármely két csúcsa közti íven nyugvó kerületi szög az $\varepsilon = 180°/n$ egész számú többszöröse. Ez azt jelenti, hogy alkalmas i, j, k pozitív egész számok mellett H_0 szögei

$$i\varepsilon, \quad j\varepsilon, \quad k\varepsilon, \quad \text{ahol} \quad i + j + k = n.$$

Ekkor H_1 szögeit a fentiek szerint a következő 4 képlethármas valamelyike adja:

$$(n - 2i)\varepsilon,\ (n - 2j)\varepsilon\ (n - 2k)\varepsilon; \qquad (2i - n)\varepsilon,\ 2j\varepsilon, 2k\varepsilon; \qquad 2i\varepsilon, (2j - n)\varepsilon,\ 2k\varepsilon;$$

$$2i\varepsilon,\ 2j\varepsilon,\ (2k - n)\varepsilon.$$

Mindegyikben ε együtthatóinak összege n. És mivel bárhogy választva az $i + j + k = n$ feltételt kielégítő pozitív egész számokat, létezik K_n-nek olyan három csúcsa (ha ti. K_n egymás utáni csúcsai $D_0, D_1, \dots, D_{n-1}$, akkor pl. D_0, D_{2i} és D_{2i+2j}), hogy az általuk meghatározott háromszög szögei éppen $i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon$, azért a H_1, $H_2, \dots$ sorozat minden háromszöge hasonló a K_n-ből kiválasztható háromszögek valamelyikéhez.

Legyen r az a legnagyobb kitevő, amelyre 2^r még osztója n-nek; azaz $n = 2^r \cdot m$, ahol m páratlan. Megmutatjuk, hogy (F): a H_1, $H_2 \dots$ *sorozatban akkor és csak akkor van H_0-hoz hasonló háromszög, ha 2^r az i, j, k számok mindegyikének osztója.*(Derékszögű háromszögre a feltétel nem teljesülhet, hiszen abban pl. $i = j + k = n/2$, és ez 2-nek 1-gyel alacsonyabb hatványával osztható, mint n.)

Legyen pl. $i = 2^\delta \cdot \mu$, ahol δ, μ egészek, $\delta \geq 0$ és μ páratlan. Ekkor H_1 megfelelő szögében, ami

$$(n - 2i)\varepsilon \qquad \text{vagy} \qquad (2i - n)\varepsilon \qquad \text{vagy} \qquad 2i\varepsilon,$$

ε együtthatója $\delta < r$ esetén osztható $2^{\delta+1}$-nel, $\delta \geq r$ esetén pedig 2^r-nel. Ez azt jelenti, hogy amennyiben 2^r nem osztója i, j, k mindegyikének, akkor H_0-nak van olyan szöge, amelytől a $H_1, H_2, \dots$ sorozat minden szöge különbözik; feltételünk tehát szükséges.

Eszerint ha $n = 2^r \cdot m$, akkor a K_n sokszög kerületének a H_0 bármelyik két csúcsa közti részén az oldalak száma 2^r-nek egész többszöröse, így H_0 csúcsai kiválaszthatók annak a k_n-be írt K_m szabályos m-szögnek a csúcsai közül is, amelyiknek egyik csúcsa A. Elegendő tehát a továbbiakban páratlan n esetét vizsgálni.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges (a K_n-ből választott, ahol n páratlan) H háromszöghöz egy és csakis egy H^* háromszög tartozik, melynek talpponti háromszöge hasonló H-hoz. Ebből már következik, hogy a fenti feltétel elegendő is, hiszen a választható háromszögek száma véges, tehát bármelyikükből kiindulva periodikus sorozatot kapunk, és ha ez a sorozat nem már az elejétől volna periodikus, akkor az a háromszög, mely az első periódus első eleme, két különböző háromszögből származna.

Legyenek a H háromszög szögei $i'\varepsilon$, $j'\varepsilon$, $k'\varepsilon$, $(i' + j' + k' = n)$ és legyen az $i^*\varepsilon$, $j^*\varepsilon$, $,k^*\varepsilon$ szögekkel bíró H^* háromszög talpponti háromszöge hasonló H-hoz. Ekkor az i', j', k' számhármas valamilyen sorrendben azonos az

(1)	$n - 2i^*$	$n - 2j^*$,	$n - 2k^*$,
(2)	$2i^* - n$,	$2j^*$,	$2k^*$,
(3)	$2i^*$,	$2j^* - n$,	$2k^*$,
(4)	$2i^*$,	$2j^*$,	$2k^* - n$

számhármasok valamelyikével. (1)-ben három páratlan szám áll, (2)–(4)-ben pedig egy-egy, eszerint ha i', j', k' mindegyike páratlan, akkor H^* szögei (1) alapján határozhatók meg egyértelműen, pl. $i^* = (n - i')/2$, ha pedig i', j', k' közül csak egy páratlan, akkor (2) alapján (hiszen i^*,j^*, k^* sorrendje nem lényeges), pl. ha i' páratlan, j' és k' pedig páros, akkor $i^* = (n + i')(2, j^* = j'/2$. Ezzel F állításunkat bebizonyítottuk.

Mivel pedig $a = 2^r m$-ben $r > 0$ esetén választható olyan H_0, melyben i páratlan, a kérdező sejtése páros oldalszámú szabályos sokszögre nem igaz. Páratlan oldalszám esetén viszont mindig igaz.

Göndőcs Ferenc, Füredi Zoltán