I. megoldás. Először a-t fejezzük ki az

$$a + a^{-1} = a + \frac{1}{a} = A,$$

másképpen $a^2 - Aa + 1 = 0$ egyenletből. A két gyök szorzata 1, így

$$a_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4}}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{a_1},$$

és ezek csak egy értéket adnak A_n céljára, hiszen

$$a_1^n + \frac{1}{a_1^n} = \frac{1}{a_2^n} + a_2^n,$$

éspedig

$$A_n = \frac{1}{2^n} \left\{ \left(A + \sqrt{A^2 - 4}\right)^n + \left(A - \sqrt{A^2 - 4}\right)^n \right\}. \tag{1}$$

A kapott kifejezés A-nak polinomja, mert a két n-edik hatvány kifejtése csak a négyzetgyökös kifejezés páratlan kitevős hatványainak előjelében különbözik, ezek összege pedig megfelelő páronként 0.

A legutóbbi megállapításban csak pozitív egész n-ekre gondoltunk. Minthogy azonban – az n-nel tovább is pozitív egész számot jelölve – fennáll $A_{-n} = A_n$, továbbá $n = 0$ esetén minden a-ra $A_0 = 2$ (hacsak $a \neq 0$), és ezt (1) is kiadja, azért (1) minden egész n-re érvényes.

Adott A esetében a és A_n akkor valós, ha $|A| \geq 2$. További elemzéstől eltekintünk.

Petz Dénes (Budapest, Veres Pálné Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Problémánk kapcsolatban van az 1234. gyakorlattal,[1] ott A_n-et a $2 \leq n \leq 7$ értékekre állítottuk elő. Ottani eredményeinket kissé átalakítva, az $n = 0$, 1 esetekkel kiegészítve és növekvő hatványok szerint rendezve az 1. ábra sémájában foglaljuk össze.

$$\begin{array}{lclllllll}
A_0 & = & 2 & & & & & & \\
A_1 & = & & +A & & & & & \\
A_2 & = & -2 & & +A^2 & & & & \\
A_3 & = & & -3A & & +A^3 & & & \\
A_4 & = & +2 & & -4A^2 & & +A^4 & & \\
A_5 & = & & +5A & & -5A^3 & & +A^5 & \\
A_6 & = & -2 & & +9A^2 & & -6A^4 & & +A^6 \\
A_7 & = & & -7A & & +14A^3 & & -7A^5 & & +A^7
\end{array}$$

1. ábra

Ezekre az értékekre A_n-et A polinomjának találtuk, mindegyikben csak az n-nel egyező párosságú kitevők lépnek fel.

Lényegében már az ottani előállításban felhasználtuk az

$$A_{n+1} = A \cdot A_n - A_{n-1}$$

rekurziót, amelyet A_n definíciója alapján könnyen igazolhatunk:

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right),$$

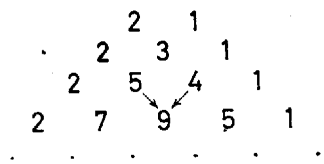
ez a kitevők párosságáról mondottaknak bármely n-re való érvényességét is bizonyítja. Ennek alapján A_{n+1} polinomalakjában minden egyes együtthatót az 1. ábrabeli séma megfelelő helyén úgy állíthatunk elő, hogy a balra fölötte levő együtthatóból kivonjuk a két sorral fölötte levő együtthatót – amint ezt a séma vastag nyilai mutatják.

Azt látjuk, és könnyen igazolható általában, hogy az előjel minden egyes oszlopban lépésről lépésre változik, a jobbra (45°-os szöggel) lejtő egyenesek mentén viszont állandó. Ezt tudva minden egyes együttható abszolút értékét a balra fölötte és két sorral fölötte álló együttható összege adja.

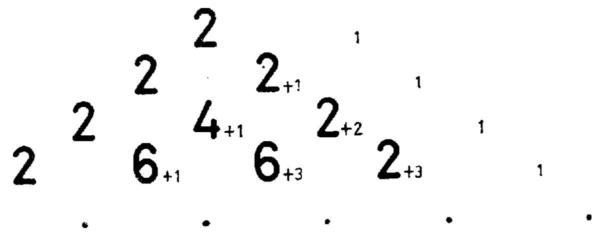
Papp Zoltán, Göndős Ferenc

Megjegyzések. 1. Az együtthatók abszolút értékére talált előállítás emlékeztet a Pascal-háromszög képezési szabályára. Az elhelyezés szerint is meglesz a megfelelés, ha sémánkat átrendezzük, a balra (45° szöggel) lejtő egymás utáni egyeneseken levő együtthatókat írjuk egy új séma egymás utáni soraiba (2. ábra).

[1] K. M. L. 39 (1969) 59. o.



2. ábra



3. ábra

Ezt a sémát – ha belső tagjait a 3. ábra szerint összegekre bontjuk – két háromszög-séma összegének tekinthetjük, a jobb oldali (kisebb számjegyekkel írt) séma maga a Pascal-háromszög, balra 1 hellyel eltolva (nagyobb számjegyekkel írva) pedig a 2-szeresét látjuk.

Az A_n polinom-alakjában fellépő együtthatókat tehát egy binomiális együttható kétszeresének és a rá következő együtthatónak összegeként állíthatjuk elő. Így pl.

$$A_7 = -\left[2\cdot\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]A+\left[2\cdot\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\right]A^3-\left[2\cdot\binom{5}{0}+\binom{5}{1}\right]A^5+\binom{6}{0}A^7.$$

Innen leolvashatjuk az általános alakot (célszerűbben a tagok fordított sorrendjében felírva):

$$A_n=\binom{n-1}{0}A^n-\left[2\cdot\binom{n-2}{0}+\binom{n-2}{1}\right]A^{n-2}+\ldots+(-1)^k\left[2\cdot\binom{n-k-1}{k-1}+\right.$$
$$\left.+\binom{n-k-1}{k}\right]A^{n-2k}+\ldots$$

Az így előállított összefüggést ugyan a fenti meggondolással is bizonyíthatnánk, mégis kényelmesebb közvetlenül, teljes indukcióval bizonyítani: a fenti rekurzió alapján:

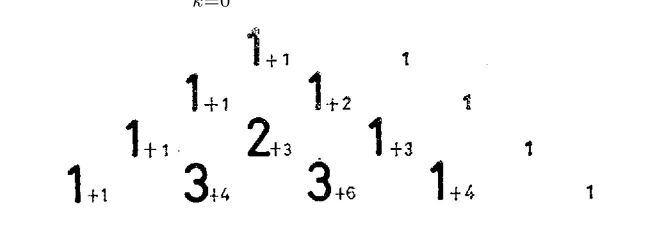
$$A_{n+1}=AA_n-A_{n-1}=A\cdot\sum_{k=0}(-1)^k\left[2\cdot\binom{n-k-1}{k-1}+\binom{n-k-1}{k}\right]A^{n-2k}-$$
$$-\sum_{j=0}(-1)^j\left[2\cdot\binom{n-1-j-1}{j-1}+\binom{n-1-j-1}{j}\right]A^{n-1-2j}=$$
$$=\sum_{k=0}(-1)^k\left\{2\left[\binom{n-k-1}{k-1}+\binom{n-k-1}{k-2}\right]+\left[\binom{n-k-1}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right]\right\}A^{n+1-2k}=$$
$$=\sum_{k=0}(-1)^k\left[2\binom{n+1-k-1}{k-1}+\binom{n+1-k-1}{k}\right]A^{n+1-2k}.$$

Az egyes együtthatókban szereplő binomiális együtthatókat össze is vonhatjuk:

$$2\binom{n-k-1}{k-1}+\binom{n-k-1}{k}=\binom{n-k-1}{k-1}\left[2+\frac{n-2k}{k}\right]=\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1},$$

tehát

$$A_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}A^{n-2k}.$$



4. ábra

2. Értelmezhetjük a 2. ábrát a 4. ábra szerint is, a nagy számjegyekkel írt összetevő balra és lefelé $1-1$ hellyel való eltolással áll elő a másikból.