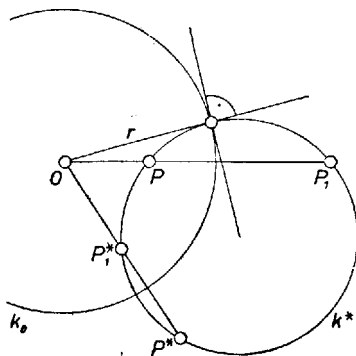


Fel fogjuk használni, hogy egy P ponton és az r sugarú, O középpontú k_0 körre vonatkozó P_1 inverzén átmenő bármelyik k^* kör merőlegesen metszi k_0 -t, és hogy k^* bármely pontjának az inverz képét az O -val összekötő egyenes metszi ki k^* -ból. (Ha ez az egyenes érintő, akkor a pont a saját inverz képe.) Valóban $OP \cdot OP_1 = r^2$, tehát k^* bármely P^* pontjára és OP^* -nak k^* -gal való P_1^* második metszéspontjára $OP^* \cdot OP_1^* = OP \cdot OP_1 = r^2$, s így P^* és P_1^* egymás inverz képei; az O -ból k^* -hoz húzott érintők hossza pedig r , vagyis az érintési pontok k_0 és k^* metszéspontjai, a két kör ide húzott sugarai eszerint merőlegesek, vagyis a két kör merőlegesen metszi egymást (1. ábra).



1. ábra

Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C -vel. Először megmutatjuk, hogy a keresett P pontból származó P_1, P_2, P_3 pontok nem eshetnek egy egyenesbe. A P_i pontok definíciója szerint ugyanis az A, P, P_1 , a B, P_1, P_2 és a C, P_2, P_3 ponthármas egy-egy egyenesen van, így ha $P_1, P_2, P_3 = P$ egy egyenesen volna, akkor ugyanerre az egyenesre esnék A, B, C is, ami lehetetlen. Létezik tehát a P_1, P_2, P_3 pontok köré írt kör, jelöljük k -val, középpontját O -val. A k kör a bevezető megjegyzés szerint merőleges a k_1, k_2, k_3 körök mindegyikére.

Mivel k_1, k_2, k_3 sugara egyenlő, azért O egyenlő távolságra van az A, B, C pontok mindegyikétől, tehát O megegyezik az ABC háromszög centrumával. Ez módot ad a k kör megszerkesztésére: mivel a k -hoz, ill. k_1 -hez metszéspontjukban húzott érintők merőlegesek egymásra és átmennek az A , ill. O ponton, így az AO szakasz k_4 Thalész-körének és k_1 -nek D_1 és D_2 metszéspontjai rajta vannak k -n is. Ezért k sugara egyenlő OD_1 -gyel. Ilyen k kör tehát akkor és csak akkor létezik, ha k_1 sugara $r \leq OA$ (egyenlőség esetén k pontkör). Ez egyben a feladat megoldhatóságának is a feltétele, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $r < AO$. (Az $r = AO$ eset triviális, ekkor P és képei azonosak O -val.)

Az, hogy az ABC háromszög szabályos, és hogy a k_1, k_2, k_3 körök sugara egyenlő, azt sugallja, hogy a PP_1P_2 háromszög is szabályos. Keressünk ezért ilyen megoldást. Vegyünk fel egy tetszőleges $P'P'_1P'_2$ szabályos háromszöget k -ban (körüljárása egyezzen ABC -ével), hosszabbítsuk meg $P'P'_1, P'_1P'_2, P'_2P'$ oldalát P'_1 -en, P'_2 -n, ill. P' -n túl és jelöljük e félegyeneseknek az ABC háromszög köré írható k' körrel vett metszéspontjait rendre $A', B',$ ill. C' -vel. A 120° -os forgási szimmetria miatt az $A'B'C'$ háromszög szabályos, létezik tehát olyan elforgatás, amely ezt az ABC háromszögbe viszi át. Vigye át ugyanez az elforgatás a $P'P'_1P'_2$ háromszöget a PP_1P_2 háromszögbe.

Az így nyert P pont egy megoldása feladatunknak, ugyanis P, P_1, A egy egyenesen vannak ($PA > P_1A$), s így a fenti megjegyzés szerint P_1 a P pont k_1 -re való inverze, hasonlóan P_2 a P_1 inverze k_2 -re, és P a P_2 pont k_3 -ra vonatkozó inverze.

Ugyancsak megoldás az a Q, Q_1, Q_2 ponthármas is, amely a P', P'_1, P'_2 hármasnak az az elforgatása, hogy QQ_1 -nek Q -n túli meghosszabbítása megy át A -n (így $QA < Q_1A$), Q_1Q_2 -nek Q_1 -en túli meghosszabbítása B -n és Q_2Q -nak Q_2 -n túli meghosszabbítása C -n. Könnyen látható, hogy ez a két ponthármas – az indexeket nem tekintve – szimmetrikusan helyezkedik el k -nak A -ból induló átmérőjére nézve.

Megmutatjuk, hogy több megoldás nincs, k -nak bármely P -től és Q -től különböző R pontjából indulunk is ki; a feladat szerinti három inverzió végrehajtása után mindig R -től különböző pontot kapunk. Ennek során k -nak a végpontjaival említett ívein mindig a két végpont által meghatározott rövidebb ívet értjük.

Ha R a PP_1 íven van, k_1 -re vonatkozó R_1 inverze is ezen az íven van, R_2 átkerül a PP_2 ívre, és R_3 is ezen az íven adódik, tehát nem lehet azonos R -rel.

Ha R a PP_2 íven van, R_1 a P_1P_2 ívre kerül, R_2 is itt keletkezik, és R_3 a PP_1 íven lesz, ismét nem lehet azonos R -rel.

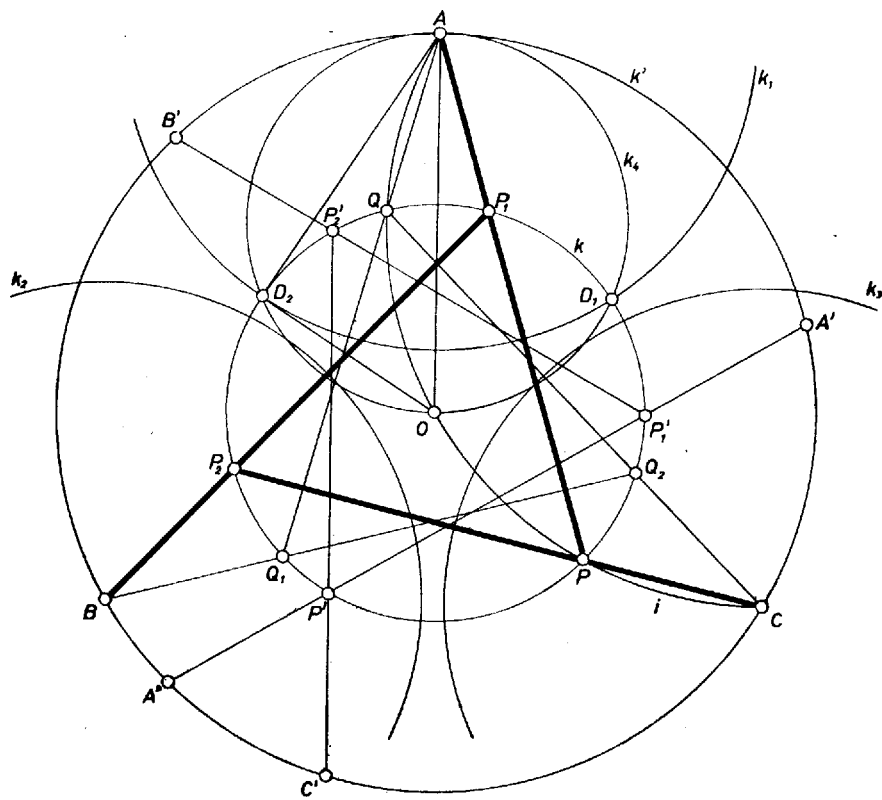
Ha R a P_2Q íven van, R_1 -et a QQ_1 ív mindenesetre tartalmazza, R_2 pedig vagy P_1Q_2 -re, vagy P_1P_2 -re kerül, R_3 eszerint vagy QQ_2 vagy PP_1 -en lesz, és egyik esetben sem lehet R -rel azonos.

Végül ha R a QP_1 íven van, R_1 a PQ_1 ívre, R_2 a Q_1Q_2 ívre és R_3 vagy QP_2 -re, vagy PP_2 -re kerül. Egyik esetben sem kapunk tehát további megoldást.

Reviczky János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Olyan P -t keresve, mely P_1 -gyel és P_2 -vel egy szabályos háromszög csúcsait adja, ez kimetszhető k -ból $APC \leq 120^\circ$ alapján az AC szakasznak azzal a 120° -os i látókörvívvel is, amely AC -nek B -t tartalmazó oldalán van.



2. ábra