

Ha x_1 és x_2 pozitív, akkor $x_1y_1 - z_1^2$ és $x_2y_2 - z_2^2$ csak úgy lehet pozitív, ha y_1, y_2 is pozitív. A bal oldali nevezőbe be tudjuk hozni x_1y_1 és x_2y_2 -t a következő egyenlőtlenség alapján:

$$(3) \quad (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \geq (\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2})^2.$$

Valóban, a két oldal különbsége

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2})^2 = x_1y_2 + x_2y_1 - 2\sqrt{x_1y_1x_2y_2} = (\sqrt{x_1y_2} - \sqrt{x_2y_1})^2 \geq 0.$$

Itt egyenlőség akkor áll fenn, ha van olyan t valós szám, hogy $y_1 = tx_1, y_2 = tx$ ($t = y_1/x_1$).

A (2) bal oldalán álló tört (3) alapján így növelhető:

$$(4) \quad B = \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{8}{(\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2})^2 - (z_1 + z_2)^2} =$$

$$= \frac{2}{\frac{(\sqrt{x_1y_1} + z_1) + (\sqrt{x_2y_2} + z_2)}{2} \cdot \frac{(\sqrt{x_1y_1} - z_1) + (\sqrt{x_2y_2} - z_2)}{2}}.$$

Valóban, növeltük a törtet, vagy nem változtattuk, mert a nevezője csak csökkenhetett, de még pozitív maradt a feltételek szerint. Továbbra sem csökkentünk, a két számtani közepet a nevezőben a mértani középpel helyettesítve:

$$(5) \quad B \leq \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{x_1y_1} + z_1)(\sqrt{x_2y_2} + z_2)} \cdot \sqrt{(\sqrt{x_1y_1} - z_1)(\sqrt{x_2y_2} - z_2)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)}} = 2\sqrt{\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} \cdot \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}}.$$

Itt a jobb oldali mértani közép helyett a nem kisebb számtani közepet írva ismét nagyítunk és ezzel a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(6) \quad B = \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq$$

$$\leq 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \right) \right) = \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Az egyenlőtlenség jele csak akkor nem hagyható el, ha sem (4), sem (5), sem (6) alatt nem növeltünk. Ez akkor áll fenn, ha alkalmas t -vel

$$y_1 = tx_1, \quad y_2 = tx_2,$$

továbbá

$$\sqrt{x_1y_1} + z_1 = \sqrt{x_2y_2} + z_2, \quad \sqrt{x_1y_1} - z_1 = \sqrt{x_2y_2} - z_2,$$

végül

$$x_1y_1 - z_1^2 = x_2y_2 - z_2^2.$$

Az utolsó egyenlőség következik az előző kettőből, továbbá következik belőlük

$$\sqrt{x_1y_1} = \sqrt{x_2y_2}, \quad z_1 = z_2,$$

végül az előbbiből az első két egyenlőség felhasználásával, mivel az x -ek is, y -ok is, s így t is pozitív

$$\sqrt{t}x_1 = \sqrt{t}x_2, \quad \sqrt{t} > 0, \quad \text{tehát} \quad x_1 = x_2, \quad \text{és így} \quad y_1 = y_2.$$

Egyenlőség tehát egyedül az $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ esetben áll fenn.

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A (3) egyenlőtlenség speciális esete a következő, ún. *Cauchy*¹-*Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenségnek:

$$(3') \quad (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

¹olv. kósi

Valóban $n = 2$, $a_1 = \sqrt{x_1}$, $a_2 = \sqrt{x_2}$, $b_1 = \sqrt{y_1}$, $b_2 = \sqrt{y_2}$, esetén (3)-at kapjuk. (3') is bizonyítható a két oldal különbségének négyzetösszegé alakításával vagy a következő módon. Adjuk össze $i = 1, 2, \dots, n$ -re az $(a_i x - b_i)^2$ kifejezéseket és rendezzük x hatványai szerint. Mivel ezek semmilyen valós x értékre nem negatívak, így összegük sem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq 0.$$

Szorozva $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ -tel és teljes négyzetté alakítással

$$(3'') \quad \left((a_1^2 a_2^2 + \dots + a_n^2)x - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \right)^2 + (a_1^2 a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \geq 0.$$

Ha nem minden a_i nulla, akkor választható x úgy, hogy a négyzet alapja 0 legyen, ebben az esetben (3'') átmegy (3') egy átrendezett alakjába. Ha $a_i = 0$ teljesül $i = 1, 2, \dots, n$ -re, akkor (3') nyilván teljesül az egyenlőség jelével.

Általában (3')-ben csak akkor áll az egyenlőség, ha (3'')-ben nem hagyható el, ez pedig akkor következik be, ha egy alkalmas $x = t$ értékre egyidejűleg teljesül

$$(a_i t - b_i)^2 = 0, \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, n,$$

azaz

$$b_i = t a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

vagy ha (3'')-t 0-val szorzással kaptuk, azaz minden $a_i = 0$. Ebben az esetben $a_i = u b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ -re $u = 0$ -val. A kettőt összefoglalhatjuk így: (3')-ben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha van olyan t és u , hogy nem mind a kettő 0 és

$$u b_i = t a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\text{-re.}$$

(A fenti első esetben $u = 1$, a másodikban $u = 0$, $t = 1$ választás megfelelő.)

Mivel a számtani és mértani közép közti, felhasznált egyenlőtlenség is érvényes akárhány nem negatív számra, így a fenti bizonyítás minden változtatás nélkül átvihető a következő egyenlőtlenség bizonyítására:

$$\text{ha } x_i > 0 \quad \text{és} \quad x_i y_i - z_i^2 > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n\text{-re,}$$

akkor

$$\frac{n^3}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n y_n - z_n^2}.$$

Egyenlőség csak az $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, $y_1 = y_2 = \dots = y_n$, $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ esetben áll fenn.