

I. megoldás. Fel fogjuk használni azt, hogy l egymás utáni természetes szám szorzata osztható $l!$ -sal. Ugyanis

$$\frac{(r+1)(r+2) \cdot \dots \cdot (r+l)}{l!} = \binom{r+l}{l}$$

és a binomiális együtthatók egész számok (ez a kombinatorikai értelmezésből nyilvánvaló).

A feladat megoldására térve, először megállapítjuk, hogy $n!$ törzstényezősz felbontásában p hányadik hatványon fordul elő. Ez az m kitevő nyilván előállítható az

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_u$$

alakban, ahol m_i jelöli az 1-től n -ig terjedő számok közül a p^i -nel oszthatók számát. Így ugyanis minden p^i -nel osztható, de p^{i+n} -nel már nem osztható tényezőt i -szer veszünk számításba. Eszerint

$$m_i = \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

és

$$m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^u} \right\rfloor,$$

ahol

$$p^u \geq n < p^{u+1}.$$

Feltevésünk szerint $p^k \mid n!$ így

$$k \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^u} \right\rfloor,$$

A jobb oldalt így alakítjuk:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^u} \right\rfloor &\leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots + \frac{n}{p^u} = \\ &= n \frac{p^u - 1}{p^u(p-1)} = \frac{n}{p-1} \left(1 - \frac{1}{p^u} \right) \leq \frac{n}{p-1}, \end{aligned}$$

tehát

$$k \leq \frac{n}{p-1},$$

vagyis

$$k(p-1) \leq n.$$

Ezért az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot felbontva egymás utáni tényezőiből alakított $p-1$ tagú csoportokra, legalább k csoport képezhető. Minden ilyen csoport az előrebecsített megjegyzés szerint osztható $(p-1)!$ -sal. Tehát $((p-1)!)^k \mid n!$

Másrészt p^k és $((p-1)!)^k$ relatív prímek, így a feltevés alapján szorzatuk is osztója $n!$ -nak, tehát $(p!)^k \mid n!$.

Pál Jenő (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. $n!$ prímfelbontásában egy p prímszám kitevője úgy határozható meg, hogy a p -vel osztható tényezőkből kiemeljük p legmagasabb hatványát, amivel osztható, és kitevőiket összeadjuk. A p -vel osztható tényezők $p, 2p, \dots, mp$, ahol

$$mp \leq n < (m+1)p, \quad \text{azaz} \quad m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

Ennek alapján $n!$ így bontható fel:

$$\begin{aligned} n! &= \{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)\} \cdot \{(p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+(p-1))\} \cdot \dots \cdot \\ &\cdot \{((m-1)p+1) \cdot \dots \cdot ((m-1)p+(p-1))\} \cdot \{(mp+1) \cdot \dots \cdot n\} \cdot m!p^m. \end{aligned}$$

(Itt az utolsó kapcsos zárójelben levő szorzat nem lép fel, ha $p \mid n$, viszont csak az áll a jobb oldalon, ha $n < p$.) Ez a felbontás teljes indukciós bizonyítást sugall.

Ha $n < p$, akkor k csak 0 lehet, és az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük most fel, hogy $n \geq p$, és az állítás igaz az n -nél kisebb természetes számokra. Ekkor a fenti felbontás kapcsos zárójelben levő szorzatai oszthatók $(p-1)!$ -sal, szorzatuk tehát $((p-1)!)^m$ -nel. Az állítás tehát ismét igaz, ha $k \leq m$. Ha viszont $k = m + k'$, és $k' \geq 1$, akkor előrebecsített megjegyzésünk szerint $p^{k'}$ az $m!$ osztója kell hogy legyen. Mivel $m < n$, így rá feltétel szerint igaz az állítás, $m!$ osztható $(p!)^{k'}$ -nel is. Így $n!$ -nak osztója

$$((p-1)!)^m (p!)^{k'} p^m = (p!)^{m+k'} = (p!)^k.$$

Az állítás tehát minden n -re érvényes.

Fried Ervin