

I. megoldás. Mindhárom adott n -érték 3-mal osztható páratlan szám, közös alakjuk $6k + 3$, ahol rendre $k = 3, 9 (= 3^2), 27 (= 3^3)$. Megmutatjuk, hogy ha $n = 6k + 3$ és $k \geq 0$, akkor (1)-nek a (2)-t is teljesítő megoldásainak száma $3k^2$

(1)-nek természetes számokban $\binom{n-1}{2}$ megoldása van. Ezt a következőképpen látjuk be. A megoldások száma nyilván annyi, ahányféleképpen egy n tagból álló csuklós mércéből (colstok) két csuklójában meghajlítva 3 tagú töröttvonalat formálhatunk, feltéve, hogy a mérce elejét és végét megkülönböztetjük. A mércéből az egymás utáni vonalrészekbe jutó tagok száma rendre x_1, x_2, x_3 . Az n tag közti $n - 1$ csukló közül 2-t a töröttvonal szögpontjai céljára valóban $\binom{n-1}{2}$ -féleképpen választhatunk ki.

Ezen megoldások közül eltávolítjuk azokat, amelyekben nem minden ismeretlen értéke különböző, a megmaradókat pedig csak növekvő sorrendben vesszük figyelembe.

$x_1 = x_2 = x_3$ egyetlen megoldásban lép fel, amikor közös értékük $2k + 1$.

Az $x_1 = x_2 \neq x_3$ típusú megoldásokban x_1 értéke most már $1, 2, \dots, 2k, 2k + 2, 2k + 3, \dots, 3k + 1$ lehet, és ez meghatározza a megoldást, tehát számuk $3k$. Ugyanennyi az $x_1 = x_3 \neq x_2, x_1 \neq x_2 = x_3$ típusú megoldások száma is. Így (1)-nek különböző természetes számokban

$$\binom{6k+3-1}{2} - 1 - 3 \cdot 3k = \frac{(6k+2)(6k+1)}{2} - 1 - 9k = 18k^2$$

megoldása van. Ezek $3! = 6$ -osával csak sorrendben különböznek, a növekvően rendezettek száma tehát valóban $3k^2$.

Próhle Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük az (1) egyenlet (2) feltételt kielégítő megoldásainak a számát $f(n)$ -nel. $f(n)$ értéke kis természetes számokra könnyen előállítható :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7

Ha valamely n -re ismerjük az összes (a (2) feltételt kielégítő) megoldást, azokban mindegyik változóból 1-et levonva az összeg 3-mal csökken, és (2)-t továbbra is kielégítő, (különböző) megoldásokat kapunk, kivéve azt az esetet, amikor $x_1 = 1$. Ha tehát az n -hez tartozó megoldások közül elhagyjuk azokat, melyekben $x_1 = 1$, a visszamaradó megoldások száma egyenlő lesz az $(n - 3)$ -hoz tartozó megoldások számával

$x_1 = 1$ mellett

$$(3) \quad x_2 + x_3 = n - 1; \quad 1 < x_2 < x_3.$$

Ha n páratlan: $n = 2k + 1$, akkor x_2 lehetséges értékei: $2, 3, \dots, k - 1$; (3) megoldásainak a száma $k - 2$. Ha n páros: $n = 2k$, akkor x_2 lehetséges értékei: $2, 3, \dots, k - 1$, a megoldások száma ismét $k - 2$. Mindkét esetben $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$ a megoldások száma, tehát

$$f(n) - f(n - 3) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2.$$

Egyszerűbb eredményt kapunk, ha $f(n)$ és $f(n + 6)$ értékét hasonlítjuk össze: a fenti összefüggés alapján

$$\begin{aligned} f(n + 6) - f(n) &= \{f(n + 6) - f(n + 3)\} + \{f(n + 3) - f(n)\} = \\ &= \left\lfloor \frac{n + 6}{2} \right\rfloor - 2 + \left\lfloor \frac{n + 3}{2} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor = n. \end{aligned}$$

Ha $n = 6k + l$ ($l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), akkor

$$\begin{aligned} f(n) &= (n - 6) + f(n - 6) = (n - 6) + (n - 12) + f(n - 12) = \dots = (n - 6) + \\ &\quad + (n - 12) + \dots + l + f(l) = \\ &\quad \sum_{j=0}^{k-1} (l + 6j) + f(l) = k(3k + l - 3) + f(l), \end{aligned}$$

ahol $f(l) = 0$, ha $l < 6$ és $f(6) = 1$. Speciálisan $l = 3$ mellett $f(n) = 3k^2$, amint azt az I. megoldásban is láttuk – a bemutatott számpéldák mind ennek speciális esetei.

Megjegyzés. Egyszerű előállítás $f(n)$ -re a következő: vesszük azt az egész számot, mely legközelebb van $\frac{(n-3)^2}{12}$ -höz. Ez ugyanis teljesül n kis értékeire és

$$\frac{(n+3)^2}{12} - \frac{(n-3)^2}{12} = n$$

miatt a fenti $f(n+6) - f(n) = n$ összefüggés alapján minden további n -re is teljesül.