

A feladat nem kívánta az összes, a feltételeket kielégítő szám megadását. Különböző ésszerű megszorítás mellett már kevés próbálgatással lehetett megoldást találni. Az alábbiakban eljárást mutatunk az összes megoldás megkeresésére.

Megoldás. Jelöljük a keresett szám jegyeit x , y -nal, azaz a számot $100x + y$ alakban írjuk, ahol $x \neq 0$, mivel a szám kétjegyű, s így

$$(1) \quad 0 < x \leq 99, \quad 0 \leq y \leq 99.$$

A feladat a következő egyenlet teljesülését kívánja:

$$(2) \quad (100x + y)(x + y) = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Mivel feltételeink szerint $x + y > 0$, így ez az egyenlet ekvivalens az $x + y$ szorzó elhagyásával keletkező egyenlettel, amit y hatványai szerint rendezünk, 4-gyel megszorozunk és teljes négyzetté kiegészítünk.

$$4y^2 - 4(x + 1)y - 4x(100 - x) = (2y - x - 1)^2 - [(x + 1)^2 + 4x(100 - x)] = 0.$$

Jelöljük $2y - x - 1$ -et z -vel. Ennek abszolút értéke nagyobb, mint $x + 1$, mert pozitív x -re a szögletes zárójel mindkét tagja pozitív. Ez azonban (1) mellett csak úgy lehet, ha $2y > x + 1$, azaz z pozitív. Másrészt (1) mellett a szögletes zárójel első tagja legalább 4, a második legalább 396, mert $x = 1$ -re ennyi, ha pedig $x > 1$, akkor (1) mellett x és $100 - x$ közül a kisebbik is legalább 2, a nagyobb legalább 50. Így $z \geq 20$.

Bontsuk tagokra és alakítsuk teljes négyzetté a fent a szögletes zárójelben levő kifejezést is:

$$(2y - x - 1)^2 + 3(x - 67)^2 = 13\,468,$$

vagy

$$(3) \quad x - 67 = t$$

jelöléssel:

$$(4) \quad z^2 + 3t^2 = 13\,468.$$

Az eredeti ismeretleneket az újakkal kifejezve:

$$(3') \quad x = t + 67, \quad y = \frac{z + t}{2} + 34.$$

A (3'), (4) együttesen ekvivalens (2)-vel, sőt (3') a (2) és (4) egész számokból álló megoldásait is kölcsönösen egymáshoz rendeli, hiszen világos, hogy ha x , y egész, akkor z és t is. Fordítva pedig azért teljesül állításunk, mert (4) egész megoldásaiban vagy z is, t is páros, vagy mind a kettő páratlan, így (3') szerint x mellett y is egész.

A (4) egyenletnek csak véges sok egész megoldása lehet, hiszen a bal oldal mindegyik tagja legfeljebb a jobb oldallal lehet egyenlő, így – a z -re már talált alsó korlátot is tekintetbe véve –

$$(5) \quad 20 \leq z \leq 116 \quad |t| \leq 67.$$

A korlátok meghatározása közben az is kiderül, hogy mindegyik elő is fordul a megoldások közt. Az első $x = 1$ -re adódott, ekkor $z = 20$, $y = 11$, $t = -66$. $t = 66$ -ra x már túl nagyra adódik. Egyáltalán (1) és (3) alapján

$$(5') \quad t \leq 32.$$

(4) további, az (5), (5')-t kielégítő megoldásai $z = 116$, $t = \pm 2$. (A $z = 1$, $t = -67$ megoldás nem valódi, mert az egyjegyű számra vezető $x = 0$, $y = l$ értékpárt adja.) Innen $x = 69$, $y = 93$ és $x = 65$, $y = 91$ adódik. Ezzel 3 megoldást már találtunk, a feladat kívánalmainak tehát eleget tettünk; megkeressük azonban a további megoldásokat is.

A próbálgatások számának csökkentésére felhasználható 13 468 oszthatósága 7-tel és 13-mal, ugyanis így

$$z^2 + 3t^2 - 7t^2 = (z + 2t)(z - 2t)$$

is osztható kell hogy legyen 7-tel. Hasonlóan

$$z^2 + 3t^2 - 13z^2 = 3(t + 2z)(t - 2z)$$

osztható 13-mal. Mivel t -vel együtt $-t$ is megoldása (4)-nek, választhatjuk t előjelét úgy, hogy $z + 2t$ legyen 7-tel osztható:

$$(6) \quad z + 2t = 7c,$$

ahol c alkalmas egész. Továbbá mivel 13 prím és nem osztója 3-nak, kell hogy

$$(7) \quad t + 2z = 13d_1 \quad \text{vagy} \quad t - 2z = 13d_2$$

teljesüljön alkalmas egész d_1 -gyel, ill. d_2 -vel.

Ha a (7) alatti első egyenlőség teljesül, akkor ennek 7-szereséből levonva (6)-nak 13-szorosát:

$$z - 19t = 91(d_1 - c).$$

Mivel z és t egyszerre páros, ill. páratlan, így magyar $d_1 - c$ páros. Értékét $2m$ -mel jelölve

$$(8) \quad z = 19t + 182m.$$

Ezt (4)-be helyettesítve 364-gyel egyszerűsíthetünk, és a következő egyenletre jutunk:

$$(9) \quad t^2 + 19mt + 91m^2 - 37 = 0.$$

Ha pedig a (7) alatti második egyenlőség teljesül, akkor ennek 7-szereséhez hozzáadva (6)-nak 13-szorosát:

$$33t - z = 91(d_2 + c).$$

Itt $d_2 + c = 2n$ páros szám kell hogy legyen. Így

$$(10) \quad z = 33t - 182n,$$

és (4) a következő egyenletbe megy át, 364-gyel való egyszerűsítés után:

$$(11) \quad 3t^2 - 33nt + 91n^2 - 37 = 0.$$

A (9) egyenlet megoldása

$$t = \frac{-19m \pm \sqrt{148 - 3m^2}}{2} = \frac{-19m \pm D_1}{2},$$

a (11) egyenleté

$$t = \frac{33n \pm \sqrt{444 - 3n^2}}{6} = \frac{33n \pm D_2}{6}.$$

Az első csak $|m| \leq \sqrt{148/3} < 8$ esetén ad valós megoldást, az utóbbi $|n| \leq \sqrt{444/3} < 13$ esetben. Ez néhány próbálgatást igényel összesen. Csak $|m| = 3, 4, 7$, ill. $|n| = 1, 10, 11$ jön tekintetbe. A fenti t értékekhez tartozó z értékek (8), ill. (10) alapján

$$z = \frac{3m \pm 19D_1}{2}, \quad \text{ill.} \quad z = \frac{-n \pm 11D_2}{2}.$$

A (6) egyenlőségnél minden z értékhez t -nek csak azt az előjelválasztását vettük tekintetbe, amelyikre az ebben az egyenlőségben szereplő tényező osztható 7-tel. Hogy az összes megoldást megkapjuk, emellett $-t$ -t is tekintetbe kell vennünk. Az így adódó és (5), (5')-t kielégítő megoldásokat az alábbi táblázatok adják. A * azt jelöli, hogy az illető ismeretlenre nem megfelelő érték adódik; az ilyen rovatokat természetesen nem folytattuk.

A (8)-ból adódó megoldások:

m	$\pm D_1$	t	z	x	y
3	11	-23	109	44	77
		23		90	*
-3		-34	100	33	67
4	10	-33	101	34	68
-4		-43	89	24	57
7	1	-66	20	1	11
	-1	-67	1	(0	1)

A (10)-ből adódó megoldások:

n	$\pm D_2$	t	z	x	y
1	21	9	115	76	96
		−9		58	87
−1		−2	116	65	91
		2		69	93
10	12	−57	61	10	36
−10		−53	71	14	43
11	9	−62	44	5	25
−11		−59	55	8	32

A feladat követelményeinek megfelelő összes számok (tízes számrendszerben felírva)

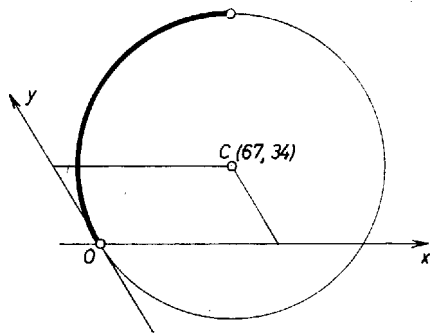
111, 525, 832, 1036, 1443, 2457, 3367, 3468, 4477, 5887, 6591, 6993, 7696

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2)-nek $x + y$ -nal való osztása útján adódó egyenlet így is alakítható:

$$(x - 67)^2 + (y - 34)^2 - (x - 67)(y - 34) = 3367.$$

Ez kör egyenlete abban a (ferdeszögű) koordináta-rendszerben, melynek pozitív féltengelyei 120° szöget zárnak be egymással (egyébként egy P pont x, y koordinátája az az irányított szakasz, melynek kezdőpontja a P -n át az x, y tengellyel párhuzamosan húzott egyenesnek az y , ill. x tengellyel való metszéspontja, végpontja pedig P). Éspedig a kör középpontja a $(67, 34)$ pont, és egy kerületi pontja az origó (hiszen az eredeti alakot kielégíti $x = y = 0$; a $(0, 1)$ pont is rajta van a körön. Minden egyes talált megoldásunknak egy rácspont felel meg a körnek az (1)-et kielégítő ívén. – Ezek alapján a talált különböző megoldások között kapcsolatok fedezhetők fel.



2. A problémát tízes számrendszerben értve az 1967. évi Arany Dániel tanulóverseny egyik feladata adódik (II. forduló 1. feladata a haladók korcsoportjában, az általános tantervű osztályok részére; lásd K. M. L. 35 (1967) 6. o.).