

Az összes lehetséges lottóhúzások az $1, 2, \dots, 90$ számok 5-öd osztályú (ismétlés nélküli) kombinációi, számuk

$$N = \binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

A feladat feltételeit kielégítő húzások növekvően rendezett lottószámai közül az első hármat e, m, h -val jelölve számoljuk meg azoknak az előírt tulajdonságú húzásoknak a számát, amelyekben h egy adott érték. Mivel $e < m$, $h = e + m$, és h után még két lottószám következik, így $3 \leq h \leq 88$. A h utáni két szám a h -nál nagyobb lottószámok közül $\binom{90-h}{2}$ -féleképpen választható, és minden ilyen párhoz e a h -nál kisebb számok közül úgy, hogy $m = h - e \geq e + 1$ legyen, azaz $2e \leq h - 1$. Így e lehetséges értékeinek száma $\left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$, és az adott h -t tartalmazó, a feltételeket kielégítő húzásoké

$$K_h = \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor \cdot \binom{90-h}{2},$$

az összes megfelelő húzásoké pedig ezek K összege a $3 \leq h \leq 88$ értékekre.

$\left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor$ értéke j , ha $h = 2j + 1$ és ha $h = 2j + 2$ ($1 \leq j \leq 43$), és az egy j értékhez tartozó tagpár összege

$$\begin{aligned} j \left\{ \binom{89-2j}{2} + \binom{88-2j}{2} \right\} &= j \frac{(88-2j)(89-2j+87-2j)}{2} = \\ &= 4j(44-j)^2 = 4(j^3 - 88j^2 + 1936j). \end{aligned}$$

Ezt összegezve $j = 1, 2, \dots, 43$ -ra és felhasználva, hogy az első n természetes szám, négyzetszám, ill. köbszám összege rendre $n(n+1)/2$, $n(n+1)(2n+1)/6$, ill. $n^2(n+1)^2/4$, kapjuk, hogy

$$K = 44 \cdot 43 \cdot (44 \cdot 43 - 88 \cdot 2 \cdot 29 + 2 \cdot 44^2) = 1\,248\,720.$$

Így pedig a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{K}{N} = \frac{1\,248\,720}{43\,949\,268} \approx \frac{1}{35} = 0,028.$$

Feladatunk második felére áttérve határozzuk meg először a

$$K'_h = \frac{h-1}{2} \binom{90-h}{2}$$

számok között a legnagyobbat.

$$\begin{aligned} K'_{h+1} - K'_h &= \frac{h}{2} \cdot \frac{(89-h)(88-h)}{2} - \frac{h-1}{2} \cdot \frac{(90-h)(89-h)}{2} = \\ &= \frac{89-h}{4} (88h - h^2 - 90h + 90 + h^2 - h) = \frac{3}{4} (89-h)(30-h). \end{aligned}$$

Emiatt $K'_{h+1} > K'_h$, ha $h < 30$, $K'_{h+1} < K'_h$, ha $h > 30$, tehát a K'_h számok között K'_{30} és K'_{31} a legnagyobb, és $K'_{30} = K'_{31}$. Láttuk, hogy ha h páratlan, $K_h = K'_h$, ha pedig h páros, $K_h < K'_h$, tehát a K_h számok között K_{31} a legnagyobb. A vizsgált húzások között tehát 31 a harmadik szám leggyakoribb értéke.

Martoni Viktor

Megjegyzések. 1. A magyar lottójáték 1969 végéig tartott 672 húzásában 16-szor lépett fel a vizsgált egyenlőség. A $16/672 = 1/42 \approx 0,024$ hányados elég jó megegyezésben van számításunk eredményével.

Az említett 16 eset viszont még nagyon kevés ahhoz, hogy a harmadik szám gyakoriságára valami törvényszerűséget mutasson. Az előfordult harmadik számok, növekedően rendezve: 7, 12, 13, 15, 15, 15 (két esetben $7+8$ alakban), 26, 32, 33, 36, 41, 45, 64, 65, 67, 73. A statisztikában használt medián (aminél ugyanannyi adat nagyobb, mint amennyi kisebb) 32 és 33 között van.

2. Azt az esetet vizsgáltuk, amelyben a $k_3 = h - (e+m)$ különbség 0. A 672 húzás között 354 esetben volt k_3 pozitív, 302 esetben negatív, legnagyobb előfordult értéke 60, a legkisebb -62 . k_3 néhány 0 körüli értékének előfordulási száma:

$$\begin{array}{cccccccccc} k_3 = +1, & +2, & +3, & +4, & +5, & +6, & +7, & +8, & +9, & +10, \\ & 14, & 22, & 18, & 13, & 16, & 18, & 11, & 18, & 13, \\ \\ k_3 = -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & -8, & -9, & -10, \\ & 16, & 18, & 16, & 18, & 17, & 10, & 11, & 11, & 10, \end{array}$$