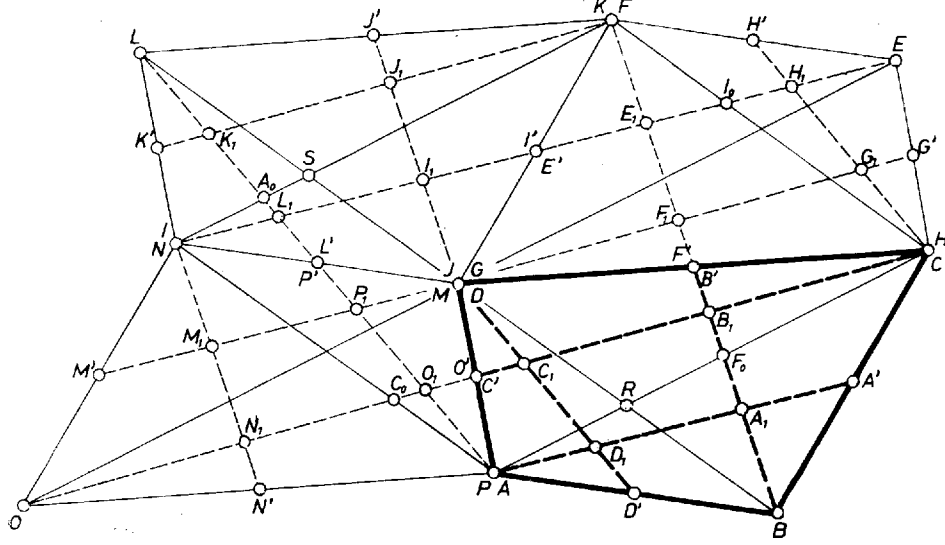


Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget a B' pontra, kapjuk az $EFGH$ négyszöget (1. ábra), ahol G azonos D -vel, H azonos C -vel.



1. ábra

Állítsuk elő az új négyszögben az E' , F' , G' , H' és E_1 , F_1 , G_1 , H_1 pontokat ugyanúgy, mint az eredeti négyszög megfelelő pontjait. Az új négyszöget E' -re tükrözve kapjuk az $IJKL$ négyszöget (J a D_2 -vel, K az F -fel azonos), és ebben hasonlóan állítsuk elő a további 4-4 pontot, végül ezt a négyszöget L' -re tükrözve az $MNOP$ négyszöget kapjuk (M a D -vel, N a J -vel azonos).

Mivel D -ben az eredeti négyszögnek mind a négy szöge fellép, az MP egyenes azonos DA -val, a tükrözések miatt $AD = EH = IL = MP$, tehát P és A is azonos, és utolsó négyszögünk az eredetiből C' -re való tükrözéssel is előállítható.

A $B_1E_1L_1O_1$ négyszög T_2 területe egyenlő $(T - T_1)$ -gyel, hiszen e négyszögnek az előbbi négy négyszögbe eső darabjai rendre egybevágóak az eredeti $ABCD$ négyszög T_1 -en kívüli részének rendre egy-egy darabjával. Az $ACFI$ négyszög oldalai rendre párhuzamosak az eredeti négyszög megfelelő átlóival, ez tehát paralelogramma, és területe az eredeti négyszög területének kétszerese: $P = 2T$

Jelöljük a B_1E_1 , E_1L_1 , L_1O_1 , O_1B_1 egyenesnek az AC , CF , FI , IA oldalon levő pontját rendre F_0 , I_0 , A_0 , C_0 -lal, az AC , BD átlók metszéspontját R -rel, és legyen

$$(1) \quad p = \frac{AR}{AC}; \quad q = \frac{RC}{AC}; \quad r = \frac{DR}{DB}; \quad s = \frac{RB}{DB};$$

$$(2) \quad \alpha = \frac{IA_0}{IF}; \quad \beta = \frac{AC_0}{AI}; \quad \gamma = \frac{CF_0}{CA}; \quad \delta = \frac{FI_0}{FC}$$

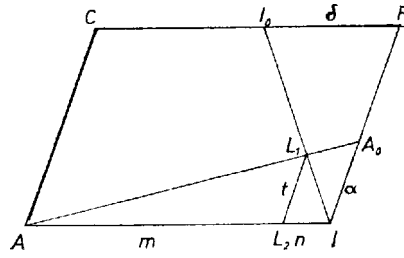
Ekkor $p + q = 1$, $r + s = 1$. Legyen még IF és DL metszéspontja S . Az A_0SL , ARL háromszögek hasonlóak, emiatt

$$\begin{aligned} A_0S : SL &= AR : RL, \\ SL \cdot AR &= A_0S \cdot RL \\ \frac{SL}{BD} \cdot \frac{AR}{AC} &= \frac{A_0S}{AC} \cdot \frac{RL}{BD}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \cdot p &= (p - \alpha)(1 + r), \\ \alpha &= \frac{p}{1 + r}. \end{aligned}$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$(3) \quad \beta = \frac{r}{1 + q}, \quad \gamma = \frac{q}{1 + s}, \quad \delta = \frac{s}{1 + p}.$$



2. ábra

Az L_1 -en át AC -vel párhuzamosan húzott egyenes messe AI -t L_2 -ben, és legyen (2. ábra)

$$\frac{L_1 L_2}{AC} = t; \quad \frac{AL_2}{AI} = m; \quad \frac{L_2 I}{AI} = n.$$

Az $AL_1 L_2$ és $AA_0 I$ hasonló háromszögek alapján $t = m\alpha$, hasonló módon kapjuk, hogy $t = \frac{n}{\delta}$, ezek alapján

$$t = \frac{\alpha}{1 + \delta\alpha}.$$

Az $ACFI$ és $AL_1 I$ idomok területének aránya tehát:

$$\frac{T_{AL_1 I}}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1 + \delta\alpha}.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{T_{CO_1 A}}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{1 + \alpha\beta}, \quad \frac{T_{FB_1 C}}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{1 + \beta\gamma}, \quad \frac{T_{IE_1 F}}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{1 + \gamma\delta}.$$

Jelöljük e négy háromszög területének összegét Q -val akkor

$$(4) \quad \frac{2Q}{P} = \frac{\alpha}{1 + \delta\alpha} + \frac{\beta}{1 + \alpha\beta} + \frac{\gamma}{1 + \beta\gamma} + \frac{\delta}{1 + \gamma\delta}.$$

Fenti összefüggéseink alapján $P = 2T$, $Q = P - T_2 = P - T + T_1 = T + T_1$ így

$$\frac{2Q}{P} = \frac{2T + 2T_1}{2T} = 1 + \frac{T_1}{T}.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy

$$(5) \quad 1 + \frac{1}{6} \leq \frac{2Q}{P} \leq 1 + \frac{1}{5}.$$

(3) és (4) alapján

$$\frac{2Q}{P} = \frac{p(p+1)}{sp + (p+1)(r+1)} + \frac{r(r+1)}{pr + (r+1)(q+1)} + \frac{q(q+1)}{rq + (q+1)(s+1)} + \frac{s(s+1)}{qs + (s+1)(p+1)}.$$

Avégett, hogy ezt a kifejezést könnyebben tudjuk kezelni, vezessük be új változóknak az egyes nevezőkben álló kifejezéseket. Mivel $p + q = r + s = 1$, ezek értéke:

$$(6) \quad \begin{aligned} 1 + 2p + r &= 5x, \\ 1 + 2r + q &= 5y, \\ 1 + 2q + s &= 5u, \\ 1 + 2s + p &= 5v. \end{aligned}$$

Új változóinkkal a régieket kifejezve kapjuk, hogy

$$(7) \quad \begin{aligned} p + 1 &= 2x + v, & p &= 2x - y, \\ r + 1 &= 2y + x, & r &= 2y - u, \\ q + 1 &= 2u + y, & q &= 2u - v, \\ s + 1 &= 2v + u, & s &= 2v - x. \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}\frac{2Q}{P} &= \frac{(2x+v)(2x-y)}{5x} + \frac{(2y+x)(2y-u)}{5y} + \frac{(2u+y)(2u-v)}{5u} + \frac{(2v+u)(2u-x)}{5v} = \\ &= \frac{4}{5}(x+y+u+v) - \frac{1}{5} \left(\frac{vy}{x} + \frac{xu}{y} + \frac{yv}{u} + \frac{ux}{v} \right) = \frac{8}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{vy}{xu} + \frac{xu}{vy} \right).\end{aligned}$$

Közben többször használtuk, hogy $x+u=y+v=1$, ami (6)-ból közvetlenül látható. (5) alapján azt kell belátnunk, hogy

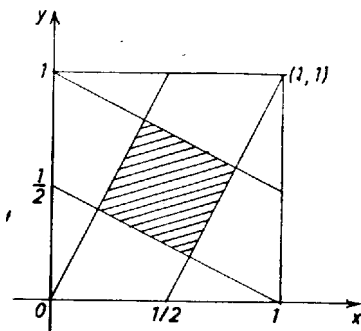
$$(8) \quad 2 \leq \frac{vy}{xu} + \frac{xu}{vy} \leq \frac{16}{3}.$$

A bal oldal könnyen belátható, hiszen x, y, u, v pozitívak, így pozitív a $\frac{vy}{xu}$ szám is, és egy pozitív számnak és reciprokának az összege valóban legalább 2. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a mondott hányados 1-gyel egyenlő; ez a helyzet pl. ha az eredeti négyszög négyzet. A jobb oldali egyenlőtlenség pedig abból fog következni, hogy megmutatjuk, $\frac{vy}{xu}$ szám $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{2}$ között van. $\frac{3}{2}$ -hez tetszőleges közeli értéket kapunk pl., ha a négyszög egyik oldala elég kicsi a többihez képest.

Mivel $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, (7) alapján kapjuk, hogy az x, y értékek a

$$(9) \quad \begin{aligned}0 &\leq 2x - y \leq 1, \\ 0 &\leq 2y - x - 1 \leq 1\end{aligned}$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományban vannak, melyet az x, y síkon a 3. ábra mutat be.



3. ábra

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ezen a tartományon

$$\frac{2}{3} \leq \frac{y(1-y)}{x(1-x)} \leq \frac{3}{2}.$$

Mivel x és y szerepét felcserélve a kifejezés értéke saját reciprokába megy át, és a vizsgált tartomány egy hasonló típusú tartományba, elegendő például a jobb oldalt bebizonyítanunk. Rögzített x értékek mellett a kifejezés értéke annál nagyobb, minél messzebb van y értéke $1/2$ -től, a kifejezés legnagyobb értékét tehát a tartomány határán kapjuk. Például az $y = 2x$ egyenesen a kifejezés értéke

$$\frac{2x(1-2x)}{x(1-x)} = 4 - \frac{2}{1-x},$$

ami x -ben monoton változik. így szélső értékeit a vizsgált szakasz végpontjaiban veszi fel: $x = \frac{1}{5}$, illetve $x = \frac{2}{5}$ mellett, ekkora kifejezés értékre $\frac{3}{2}$, illetve $\frac{2}{3}$. Hasonló módon kapjuk, hogy a kifejezés értéke a többi oldalszakaszon is monoton változik, és a másik két csúcspan is $\frac{3}{2}$, illetve $\frac{2}{3}$ az értéke, állításunkat ezzel bizonyítottuk.