

Az

$$f_1(x) = f(x) = ax^2 + bx + c$$

másodfokú függvényből kiindulva az

$$(2) \quad f_{i+1}(x) = f(f_i(x)) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

rekurzióval egy függvénysorozatot képezünk. Ha az

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$$

számok eleget tesznek (1)-nek, akkor

$$(3) \quad x_{i+1} = f_i(x_1), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

és így x_1 gyöke az

$$(4) \quad f_n(x) = x$$

egyenletnek. Megfordítva: a (4) egyenlet tetszőleges gyökét véve x_1 nek, az $x_2, \dots, x_{n+1}$ számokat pedig (3) alapján definiálva, az (1) rendszer egy megoldásrendszerét kapjuk.

Könnyíti az áttekintést, ha az $f(x)$ függvényt olyan szakaszon vizsgáljuk, ahol értékkészlete és értelmezési tartománya azonos: ez a közös halmaz lesz a (2) rekurzióval definiált függvények értelmezési tartománya is. Emiatt választjuk az

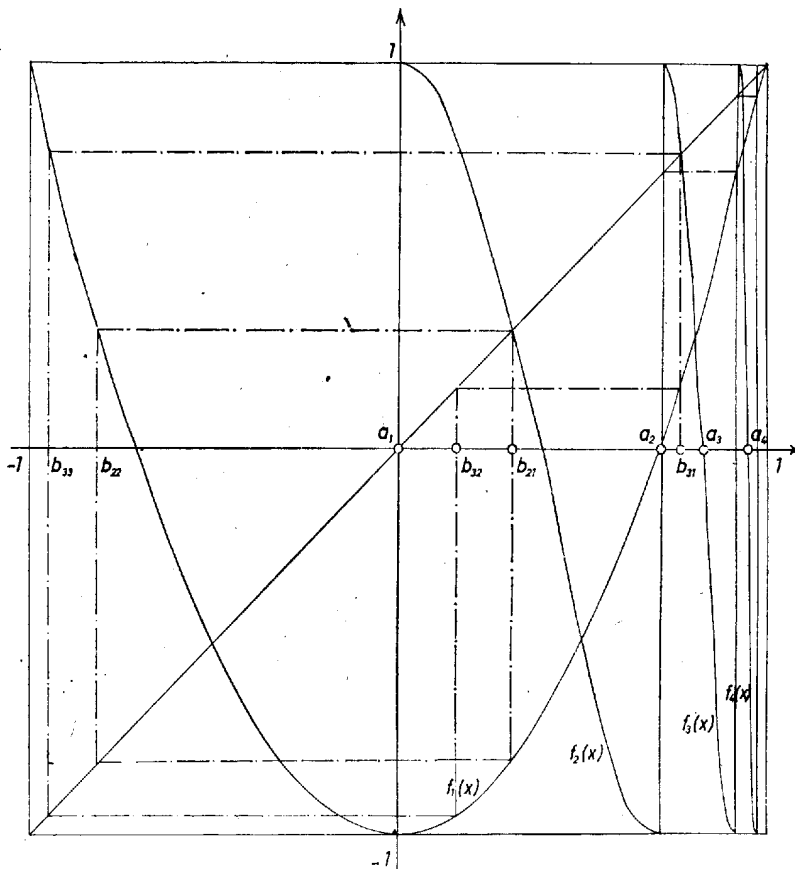
$$(5) \quad f(x) = f_1(x) = 2x^2 - 1$$

függvényt, mely a $(-1, 1)$ zárt intervallumot önmagára képezi le. Megmutatjuk, hogy (5)-ből kiindulva és (2) szerint állítva elő az $f_n(x)$ függvényt, a kapott (4) egyenletnek legalább három gyöke van, tehát $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ megfelelő együtthatók.

A (4) egyenlet nyilvánvaló gyöke az

$$f(x) = x$$

egyenlet két gyöke, az $A = -1/2$, és a $B = 1$ szám, így egyetlen további gyök létezését kell kimutatnunk.



Az (5) függvény a $(0, 1)$ zárt szakaszon monoton nő -1 -től $+1$ -ig, így egyértelműen meghatározott a $[-1, 1]$ szám-közben az a φ függvény, amely az x számhoz azt a számot adja meg, amelyre f értéke x (ezt a függvényt nevezzük f inverzének). A φ függvény a $[-1, 1]$ zárt szakaszbeli számokhoz a $[0, 1]$ zárt szakasz számait rendeli hozzá, az előbbi szakaszt az utóbbira képezi le. Az $a_1 = 0$ értékből kiindulva képezzük az

$$(6) \quad a_{i+1} = \varphi(a_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

rekurzióval az a_i sorozatot. Mivel a $\varphi(x)$ függvény is monoton nő, és értékkészlete a $(0, 1)$ zárt intervallum,

$$(7) \quad 0 = a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots \leq 1.$$

A φ függvény a $(-1, 0)$ szakaszt az (a_1, a_2) szakaszra, ezt a szakaszt az (a_2, a_3) szakaszra képezi le, és általában az (a_i, a_{i+1}) intervallumot a szomszédos (a_{i+1}, a_{i+2}) intervallumba viszi, hiszen monotonitása miatt ha

$$a_i < x < a_{i+1}$$

akkor

$$\varphi(a_i) < \varphi(x) < \varphi(a_{i+1}).$$

Emiatt, ha az $f_n(x)$ függvényt csak az (a_n, a_{n+1}) zárt szakaszon tekintjük, azt ez a függvény, mivel a φ függvény inverzének n -szer egymás után való alkalmazását jelenti, a $(-1, 1)$ zárt szakaszra képezi le. Nevezetesen

$$(8) \quad f_n(a_n) = 1, \quad f_n(a_{n+1}) = -1,$$

ami f_n és a_n definíciójából teljes indukcióval közvetlenül következik, pl.:

$$f_n(a_n) = f_{n-1}(f(a_n)) = f_{n-1}(a_{n-1}) = 1.$$

Hasonlóan indukcióval kapjuk, hogy az $f_n(x)$ függvény az (a_n, a_{n+1}) szakaszon monoton fogy, tehát átmetszi az $y = x$ egyenest. A kapott metszéspont abszcisszája lesz a (4) egyenlet keresett harmadik gyöke.

Göndőcs Ferenc

Megjegyzés. Az ábrán feltüntettük a (4) egyenlet $n = 2$ -höz tartozó b_{21} és $n = 3$ -hoz tartozó b_{31} gyökét, továbbá az (1) egyenletrendszer megfelelő b_{21}, b_{22} , ill. b_{31}, b_{32}, b_{33} , gyökrendszerét is.