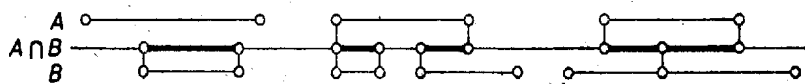


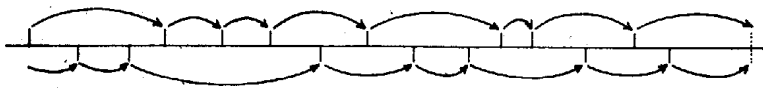
I. megoldás. Mivel sem A intervallumainak, sem B -éinek nincs közös pontja, így a két rendszer közös részének minden egyes pontja A és B egy-egy meghatározott intervallumába esik. E két intervallum közös része egy intervallum, melynek kezdőpontja a két intervallum valamelyikének kezdőpontja, vagy a közös kezdőpontjuk, ha azok egybeesnek. Az utóbbi esetben rendeljük a közös rész részintervallumához az öt tartalmazó A -beli intervallumot, az előbbi esetben azt az A - vagy B -beli intervallumot, amelyikével a kezdőpontja egybeesik (1. ábra).



1. ábra

Így a közös részbeli különböző intervallumokhoz különböző intervallumokat rendeltünk, hiszen kezdőpontjaik különbözők, és bármely A - vagy B -beli intervallumot a közös résznek legfeljebb egy intervallumához rendeltünk hozzá. Így azonban az A és B első intervalluma közül az előbb kezdődött, vagy ha kezdőpontjuk egybeesik, a B -belit nem rendeltük hozzá a közös rész egy intervallumához sem, ezért a közös rész legfeljebb 1-gyel kevesebb intervallumból állhat, mint amennyi A -ban és B -ben együtt van, vagyis $n + m - 1$ -ből.

Ennyiből viszont állhat, sőt jelöljük ki bárhogy az A - és B -beli intervallumok kezdőpontjait pl. úgy, hogy az elsőek essenek egybe, a többiek viszont mind legyenek különbözők, és tartson minden intervallum az ugyanabba a halmazba tartozó következő kezdőpontig, az utolsó intervallumok pedig egy olyan végpontig, amelyiket az összes kezdőpont megelőz (2. ábra).



2. ábra¹

Ekkor A is, B is, a közös rész is az első kezdőponttól az utolsó végpontig terjedő nyílt intervallum, elhagyva belőle az első esetben az A -beli, a második esetben a B -beli; a harmadik esetben az összes kezdőpontokat. Így valóban a 3 halmaz n , m , ill. $m + n - 1$ intervallumból áll.

Ha A vagy B egyetlen intervallumot sem tartalmaz, akkor természetesen a közös részük sem; ezt az esetet a fentiekben kizártuk.

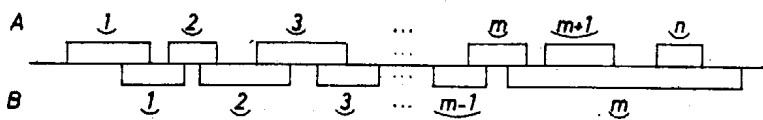
II. megoldás. Legyen a számegyenesen balról jobbra haladva az A halmaz j -edik szakaszának m_j számú B -beli intervallummal nem üres közös része. Ekkor $A \cap B$ intervallumainak száma

$$k = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Ennél az összeszámolásnál egy B -beli intervallumot 1-nél többször is számolhattunk, annyi alkalommal, ahány A -beli szomszédos intervallumpárral van nem üres közös része. Mivel összesen $n - 1$ ilyen szomszédos intervallumpár van, viszont lehetnek olyan B -beli intervallumok, amelyeket nem számoltunk, így azt kaptuk, hogy

$$k = m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m + n - 1.$$

Itt egyenlőség is állhat, ha pl. $n \geq m$, B l -edik intervalluma az A l -edik intervallumának utolsó harmadától $l + 1$ -edik intervallumának első harmadáig terjed $l = 1, \dots, m - 1$ -re, B m -edik intervalluma pedig A m -edik intervallumának $2/3$ -ánál kezdődik és tartalmazza összes esetleges további szakaszát (3. ábra).



3. ábra²

Beck József (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A közös rész két szomszédos intervallumát olyan pontok választják el (esetleg 1 pont), amelyek A és B közül legalább az egyikben nincsenek benne. Ezek a pontok együtt a számegyenes A -ba nem tartozó pontjainak

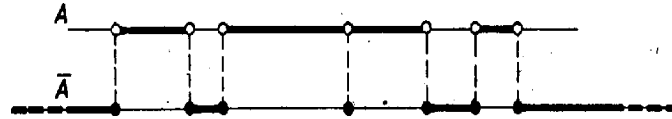
¹ A 2. ábra kiegészítendő: a bal szélén alul is kell osztásvonal.

² A 3. ábrán $m + 1$ és n közé 3 pont teendő.

– az A -hoz a számegyenesre vonatkozóan tartozó kiegészítő (komplementer) halmaznak, szokásos jelével $\overline{A}$ -nak – és a B -be nem tartozó pontok $\overline{B}$ halmazának az egyesítése: $\overline{A \cap B}$. Ez éppen $A \cap B$ komplementere:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ha A az (a_i, b_i) $i = 1, \dots, n$ intervallumokból áll $(a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n)$, akkor $\overline{A}$ az a_1 -ig terjedő és a b_n -tól kezdődő félegyenesből és a $[b_i, a_{i+1}]$ zárt intervallumokból áll $(i = 1, \dots, n-1)$, amelyek egy-egy pontra is redukálódhatnak (4. ábra).



4. ábra

Hasonlóan $\overline{B}$ két félegyenesből és $m-1$ zárt intervallumból áll.

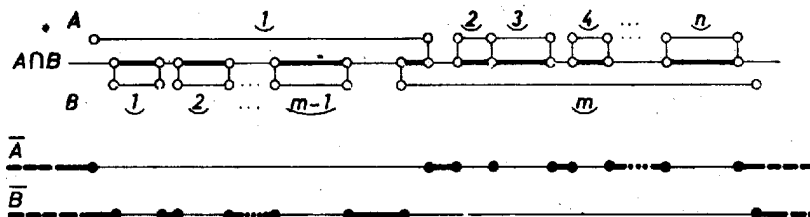
Az $\overline{A \cap B}$ ugyancsak két félegyenesből és zárt szakaszokból áll. Az utóbbiak számát jelöljük k -val. $\overline{A \cap B}$ nyilván legfeljebb annyi szakaszból áll, mint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ együtt, azaz

$$k \leq m + n - 2,$$

mert az egyesítésnél több intervallum alkothat egy nagyobbat, de új intervallum nem keletkezhet. A k intervallum közt $A \cap B$ -nek $k-1$ intervalluma van, ezen kívül az első félegyenes és az első szakasz, továbbá az utolsó szakasz és a második félegyenes közt egy-egy, így $A \cap B$ intervallumainak száma

$$k + 1 \leq m + n - 1.$$

Itt az egyenlőség bekövetkezhet pl. ha A első szakasza tartalmazza B első $m-1$ szakaszát és még az utolsóval is van nem üres közös része, B utolsó szakasza pedig tartalmazza A többi szakaszait. Ekkor ugyanis $\overline{A}$ és $\overline{B}$ szakaszainak sem egymással, sem a félegyenesekkel nincs közös pontja (5. ábra).



5. ábra