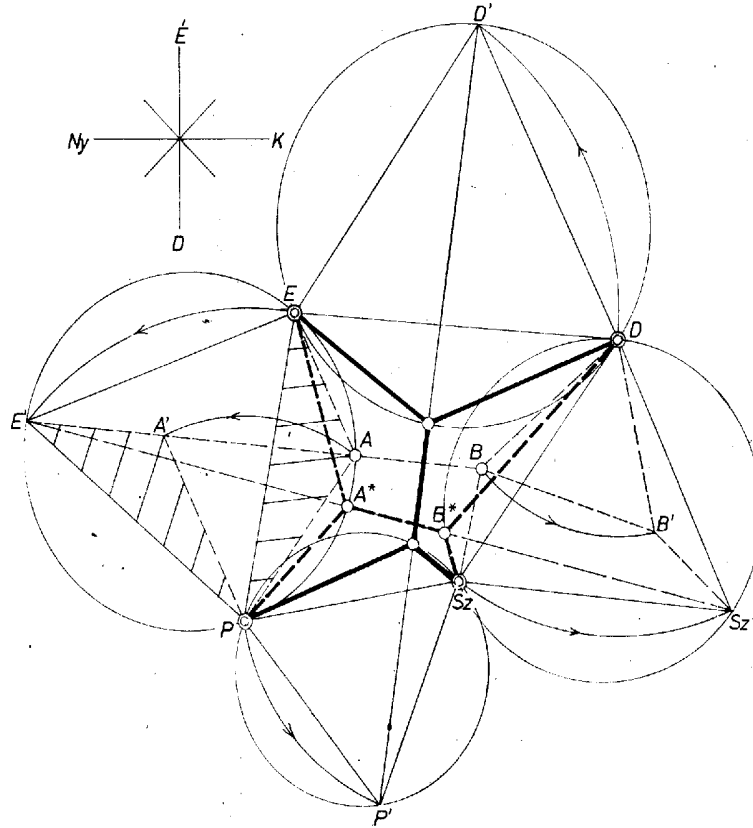


Csak olyan távvezeték-rendszerekkel foglalkozunk, melyek véges sok egyenes szakaszból állnak (ha a távvezeték a szokott módon oszlopok közt kifeszített huzalokkal készítjük el, akkor ez a feltevés eleve teljesül).



Az említett városok (mint pontok) helyzetét térkép alapján vettük fel az ábrán, és nevük első betűjével jelöltük. Legyen R egy tetszőleges, a feladat követelményeinek eleget tevő rendszer. R tartalmaz egy E -t Sz -szel összekötő L véges sok egyenes szakaszból álló útvonalat. E szakaszok mindegyikén meghatározhatjuk a P -hez legközelebb levő pontot: ez P -nek az illető szakaszt tartalmazó egyenesen levő vetülete, ha ez a vetület az illető szakaszon van, különben a szakasz két végpontja közül a P -hez közelebbi. Az így kapott pontok közül a P -hez legközelebbit jelöljük A -val: ez egyben az L útvonal P -hez legközelebbi pontja. Hasonló módon legyen B az L útvonal D -hez legközelebbi pontja.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy E -ből L -en Sz felé haladva előbb az A vagy a B pontba jutunk-e el. Az első esetben L -en az említett pontok sorrendje: E, A, B, Sz , az ilyen útvonalakat első típusúaknak nevezzük. Jelöljük R_1 -gyel az EA, PA, AB, BSz, BD szakaszokból álló rendszert. Megmutatjuk, hogy R_1 -ben a vezetékek együttes hossza nem nagyobb, mint R -ben. R ugyanis tartalmazza L -t, ennek a hossza legalább akkora, mint az $EABSz$ törött vonalé. Továbbá R tartalmaz egy P -ből E -be futó útvonalat, ennek az L -hez nem tartozó darabja nem lehet PA -nál rövidebb. Hasonló módon a D -ből Sz -be futó útvonal L -hez nem tartozó darabja nem lehet DB -nél rövidebb. Így R_1 minden részéhez találtunk R -ben nála nem rövidebb – és egymást még részben sem tartalmazó – útdarabokat, állításunkat tehát bebizonyítottuk.

Forgassuk el az EAP törött vonalat P körül pozitív irányban 60° -kal, kapjuk az E', A' pontokat. Mivel PAA' egyenlő oldalú háromszög,

$$EA + AP = E'A' + A'P = E'A' + A'A.$$

Hasonló módon vigye a D körüli, pozitív irányú 60° -os forgatás a B, Sz pontokat B' -be és Sz' -be, ekkor

$$SzB + BD = Sz'B' + B'D = Sz'B' + B'B.$$

R_1 darabjainak összhossza tehát egyenlő az $E'A'ABB'Sz'$ törött vonal hosszával, ami pedig legalább akkora, mint az (A és B helyzetétől független) $E'Sz'$ szakasz hossza.

Mivel az $E'Sz'$ szakasz metszi az $EE'P$ egyenlő oldalú háromszög köré írható kör rövidebb EP ívét az A^* pontban, és az $SzSz'D$ egyenlő oldalú háromszög köré írható kör rövidebb SzD ívét a B^* pontban, van olyan első típusú R_1^* távvezeték-rendszer, melynek összhossza egyenlő az $E'Sz'$ szakasz hosszával. Ugyanis $PA^*E' \angle = 60^\circ$ s így A^* elforgatottja az $E'A^*$ szakaszra, B^* -é hasonlóan a $B'Sz'$ szakaszra kerül. Az A^*, B^* pontok által meghatározott R_1^* távvezeték-rendszer tehát minimális az első típusú rendszerek körében.

Hasonló módon határozhatjuk meg azon rendszerek körében a minimális úthálózatot, melyeknél L -en E -ből indulva előbb jutunk B -be, és aztán A -ba. Jelöljük ezt a minimális rendszert R_2^* -gal, R_2^* darabjának összhossza egyenlő a

$P'D'$ szakasz hosszával, ahol P' -t a P -ből kapjuk Sz körüli, D' -t pedig D -ből kapjuk E körüli pozitív irányú 60° -os forgatással.

A szerkesztés és a térkép léptéke alapján meghatározzuk az $E'Sz'$, $P'D'$ szakaszok valódi hosszát, előbbire 504 km-t, utóbbira 501 km-t kapunk, tehát R_2^* a minimális rendszer. Megjegyezzük, hogy az eltérés igen kicsi a két távolság között, nagyságrendje megegyezik a (nem pontszerű) városok méretével (3 – 6 km) és a szerkesztésünkből származó hibával.

Göndöcs Ferenc