

Kiindulunk a

összefüggésből. Ezt az $n = 1, 2, \dots, 17$ értékekre felírva és összeadva

A második zárójel értéke 0, hiszen $\sin n\alpha + \sin (17 - n)\alpha = 0$, így pedig az első zárójel értéke is 0, hiszen $\cos 17\alpha = 1$ folytán egyenlő a bal oldallal, és szorzója, $\cos \alpha \neq 1$. Így

ami a

jelölés bevezetésével így alakul:

A bevezetett számokra egyrészt nyilvánvalóan

$$(3) \quad t_n \cdot t_m = t_{n-m} + t_{n+m},$$

$$(4) \quad 2 > t_1 > t_2 > 2 \cos 60^\circ = 1 > t_3 > t_4 > 0 > t_5 > t_6 > t_7 > t_8 > -2.$$
$$U = t_1 + t_2 + t_4 + t_8, \quad u = t_3 + t_5 + t_6 + t_7,$$
$$(5) \quad U + u = -1, \quad U \cdot u = 4(t_1 + t_2 + \dots + t_8) = -4,$$
$$(6) \quad U = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad u = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2},$$

ugyanis (4) miatt $U > 0$.

Ezek alapján hasonlóan számíthatjuk ki a következő két-két összeget:

$$V = t_1 + t_4, \quad v = t_2 + t_8; \quad w = t_3 + t_5, \quad W = t_6 + t_7,$$

ugyanis ezekre

$$V + v = U \quad \text{és} \quad V \cdot v = -1, \quad \text{illetőleg} \quad w + W = u \quad \text{és} \quad w \cdot W = -1,$$

és mivel még (4) szerint $V > 0$ és $W < 0$, azért

$$(7) \quad v = \frac{U - \sqrt{U^2 + 4}}{2},$$

$$(8) \quad w = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4}}{2}.$$

Végül a w összeg tagjainak szorzata (3) szerint

$$t_3 t_5 = t_2 + t_8 = v,$$

így a keresett két érték 2-szerese: $2 \cos 3\alpha = t_3$ és $2 \cos 5\alpha = t_5$ a következő másodfokú egyenlet két gyöke:

$$(9) \quad x^2 - wx + v = 0,$$

előrebocsátott megjegyzésünk szerint azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy az előjeles OH , OJ szakaszok 2-szerese is kielégíti-e (9)-et.

A szerkesztés szerint $OD = 1/4$, $DC_1 = \sqrt{17}/4$. Legyen X az ODC_1 háromszög D -beli szögfelezőjének OC_1 -gyel való metszéspontja. A szögfelező-tétel alkalmazásával, majd felismerve a (6)-beli második kifejezést, továbbá az ODX derékszögű háromszögből

$$OX = \frac{OD \cdot OC_1}{OD + OC_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}} = -\frac{1}{2u},$$

$$DX = \sqrt{OD^2 + OX^2} = -\frac{1}{4u} \sqrt{u^2 + 4}.$$

Hasonlóan, mivel DE az ODX háromszög szögfelezője, mindjárt felismerve a (8) kifejezést

$$(10) \quad OE = \frac{OD \cdot OX}{OD + DX} = \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2u}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4u} \sqrt{u^2 + 4}} = \frac{1}{2(\sqrt{u^2 + 4} - u)} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u + \sqrt{u^2 + 4}}{2} = \frac{w}{4},$$

és ebből

$$\operatorname{tg} EDO \triangleleft = \frac{OE}{OD} = w.$$

Ennek alapján kifejezhetjük OF -et. (8) és (5) felhasználásával, majd felismerve a (7) kifejezést

$$(11) \quad OF = -OD \operatorname{tg} (45^\circ - EDO \triangleleft) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1-w}{1+w} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(2-u) - \sqrt{u^2 + 4}}{(2+u) + \sqrt{u^2 + 4}} =$$

$$= \frac{2 - \sqrt{u^2 + 4}}{-4u} = \frac{2U - \sqrt{(uU)^2 + 4U^2}}{-4uU} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U - \sqrt{U^2 + 4}}{2} = \frac{v}{4}.$$

Most már képezhetjük a kérdéses $2OH$, $2OJ$ előjeles szakaszok összegét és szorzatát. E felezi a JH szakaszt, ezért (10) alapján

$$(12) \quad \frac{OH + OJ}{2} = OE, \quad 2OH + 2OJ = 4OE = w,$$

a közös magasságú HJG és G_1FG derékszögű háromszögekből pedig (11) alapján

$$(13) \quad 2OH \cdot 2OJ = -4OH \cdot |OJ| = -4OG^2 = -4 \cdot OC_1 \cdot |OF| = 4 \cdot OF = v,$$

és (12), (13) együtt azt jelenti, hogy az OH , OJ előjeles szakaszok 2-szerese szintén kielégíti a (9) egyenletet. És mivel (9)-nek csak két gyöke van, a két úton kapott gyökök páronként azonosak, (4) figyelembevételével

$$2OH = t_3 = 2 \cos 3\alpha, \quad 2OJ = t_5 = 2 \cos 5\alpha,$$

ami állításunkat bizonyítja.

Csirmaz László (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. *C. F. Gauss* német matematikus bebizonyította (19 éves korában, 1796-ban), hogy szabályos sokszög eukleidészi szerkesztéssel akkor és csak akkor szerkeszthető, ha oldalai számának prímfelbontása $2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_r$ alakú, ahol $p_1, \dots, p_r$ egymástól különböző, $2^s + 1$ alakú prímek, $s = 2^t$ alakú kitevővel. (A $t = 0$ és 1 esetek, szabályos háromszög és szabályos ötszög, közismertek.) Azóta számos eljárást adtak meg a szabályos 17-szög szerkesztésére, a fentiekben *H. W. Richmond* eljárását ismertük meg (1893). Az $\alpha = 2\pi/17$ szögre Gauss a következő eredményt közölte egy tanítványával:

$$\begin{aligned} \cos \alpha = & -\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ & + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$