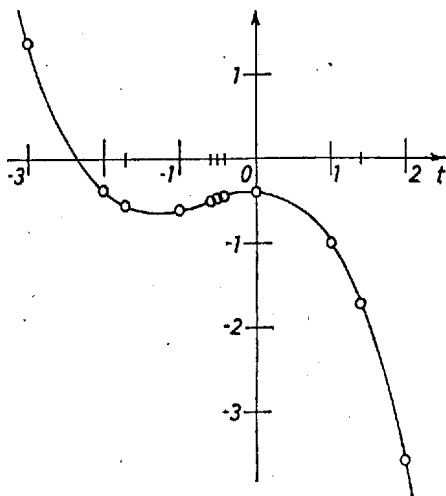


A megadott t_0 , értékek mellett a sorozatok első értékeit az alábbi táblázat tartalmazza:

t_0	-3	-2	-1	-1/2	0	1	2
t_1	+1,4	-0,4	-0,6	-0,475	-0,4	-1	-3,6
t_2	-1,73	-0,4512	-0,5007		-0,4512	-0,6	+3,7472
t_3	-0,562						

Ezek alapján ábrázoljuk az $f(t) = -\frac{1}{5}(t^3 + 2t^2 + 2)$ függvényt.



Mivel $t = -0,4$ mellett $f(t) < t$ és $t = -0,5$ mellett $f(t) > t$, a $t = f(t)$ egyenletnek van a $(-0,5; -0,4)$ számközben gyöke, jelöljük ezt t^* -gal:

$$(2) \quad -0,5 < t^* < -0,4.$$

Legyen $t_n = t^* + \varepsilon$, akkor (1) alapján

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= -\frac{1}{5}[(t^{*3} + 2t^{*2} + 2) + \varepsilon(3t^{*2} + 4t^*) + \\ &+ \varepsilon^2(3t^* + 2) + \varepsilon^3] = t^* + \frac{\varepsilon}{5}(A + B\varepsilon - \varepsilon^2), \end{aligned}$$

ahol $A = -3t^{*2} - 4t^*$; $B = -3t^* - 2$. (Felhasználtuk, hogy t^* gyöke az egyenletnek, azaz $f(t^*) = t^*$.) (2) alapján – mivel e számközben A monoton –

$$(3) \quad 1,12 < A < 1,25,$$

$$(4) \quad -0,8 < B < -0,5.$$

Megmutatjuk, hogy ha $-1 \leq t_n \leq 0$, akkor t_n -től kezdve a sorozat monoton, mégpedig $t_n < t^*$ esetén monoton növekvő és $t_n > t^*$ mellett monoton fogyó. (2) miatt ugyanis ekkor $|\varepsilon| < 0,6$, tehát (3), (4) alapján

$$\begin{aligned} A + B\varepsilon - \varepsilon^2 &< A + |B| \cdot |\varepsilon| < 1,25 + 0,6 \cdot 0,8 = 1,73 < 2, \\ A + B\varepsilon - \varepsilon^2 &> A - |B| \cdot |\varepsilon| - \varepsilon^2 > 1,12 - 0,48 - 0,36 = 0,28 > 0. \end{aligned}$$

Ezek alapján pedig

$$(5) \quad 0 < \frac{t_{n+1} - t^*}{t_n - t^*} < 0,4,$$

vagyis t_{n+1} a t^* gyöknek ugyanazon az oldalán van, mint t_n , de közelebb kerül a gyökhöz, a hiba határozottan csökken. Ez utóbbi megállapításból következik, hogy t_{n+1} is a $(-1, 0)$ számközben van, tehát a fenti tulajdonság az összes további lépésnél megmarad.

A $t_0 = 2$ kiinduló érték kivételével az összes többi sorozat az első néhány lépés során bejut a $(-1, 0)$ számközbe, és ettől kezdve monoton lesz. Mivel a hiba minden lépésben az előző hiba felénél kisebbre csökken, ezekben a sorozatokban a t^* gyök tetszőlegesen jó közelítése megtalálható.

A $t_0 = 2$ kezdeti értékből kiindulva egyre nagyobb abszolút értékű számokat kapunk váltakozó előjellel a sorozat elemeire. Megmutatjuk, hogy ez mindig így van, ha a hiba legalább 3, azaz $|\varepsilon| \geq 3$.

$$A + B\varepsilon - \varepsilon^2 < -\varepsilon^2 \left(1 - \frac{B}{\varepsilon} - \frac{A}{\varepsilon^2}\right) < -\varepsilon^2 \left(1 - \frac{0,5}{3} - \frac{1,25}{9}\right) < -6,$$

$$\frac{t_{n+1} - t^*}{t_n - t^*} < -1,2.$$

Tehát ha a hiba 3-nál nagyobb, akkor minden lépésben megváltozik az előjele, és abszolút értékben növekszik.

Beck József, Csirmaz László