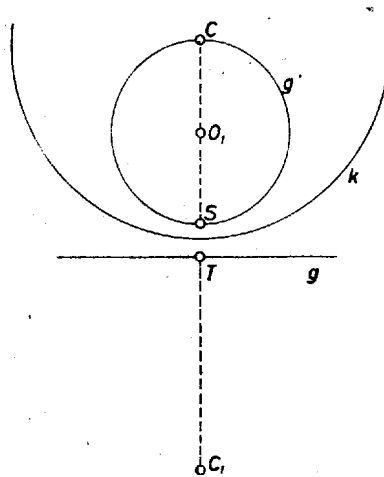


Ismeretes,¹ hogy g -nek g' inverze mindenképpen kör, tehát mindig beszélhetünk O_1 középpontjáról. Tudjuk továbbá, hogy ha g egyenes, akkor inverz képe átmegy C -n, és C -ből induló átmérőjének másik végpontját a C -ből a g egyenesre bocsátott merőleges T talppontjának S inverz képe adja (1. ábra).

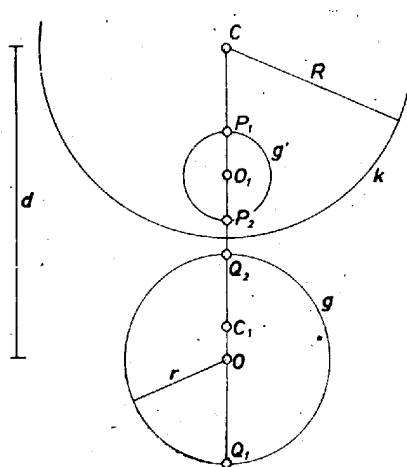


1. ábra

Így O_1 a CS szakasz felezőpontja.

Másrészt C -nek g -re való tükörképe a CT félegyenesen van, kétszer olyan távol C -től, mint T , így ebben az esetben a feladat állítása következik abból az egyszerű tényből, hogy kétszeres távolságban elhelyezkedő pont inverz képe fele akkora távolságra van az inverzió középpontjától, mint az eredeti pont inverz képe.

Legyen most g kör, és O középpontja ne legyen azonos C -vel. Tudjuk, hogy g' céljára egy átmérő végpontjait a g kör C -től legtávolabbi Q_1 és legközelebbi Q_2 pontjának P_1 és P_2 inverz képei adják, tehát O_1 a P_1P_2 szakasz felezőpontja. Jelöljük R -rel a k alapkör, r -rel g sugarát és legyen $CO = d$, a feltevés alapján $d \neq r$ (2. ábra).



2. ábra

Ekkor

$$\begin{aligned} CQ_1 &= d + r, & CQ_2 &= d - r, \\ CP_1 &= \frac{R^2}{d + r}, & CP_2 &= \frac{R^2}{d - r}, \end{aligned}$$

ezért

$$(1) \quad CO_1 = \frac{CP_1 + CP_2}{2} = R^2 \cdot \frac{d}{d^2 - r^2},$$

ahol a szereplő távolságok előjellel együtt értendők, pozitívnak véve a CO félegyenes irányát.

¹Lásd Surányi János – Tusnády Gábor: Az inverzióról, K. M. L. 37 (1968) 97–101. o.

Másrészt a C pont g -re vonatkozó C_1 inverz képe O -tól $-\frac{r^2}{d}$ távolságra, s így C -től $d - \frac{r^2}{d}$ távolságra van. Ezért a C_1 pont k -ra vonatkozó C_2 inverz képének C -től való távolsága

$$(2) \quad CC_2 = \frac{R^2}{d - \frac{r^2}{d}} = R^2 \cdot \frac{d}{d^2 - r^2}.$$

Mivel pedig O_1 és C_2 a k és g centrálisán helyezkednek el, azért $C_2 \equiv O_1$, ami bizonyítandó volt.

Végül abban az esetben, ha g kör, és O középpontja maga C , akkor C -nek nem létezik g -re vonatkozó inverz képe, s így g' középpontját a feladatban leírt módon nem kaphatjuk meg. Könnyű látni azonban, hogy ekkor az inverz kör középpontja maga C .

Göndöcs Ferenc, Martoni Viktor, Somorjai Gábor

Közzöljük, hogy egy adományozó felkérésére *Somorjai Gábornak* és *Göndöcs Ferencnek* 50–50 Ft jutalmat juttattunk el problémamegoldásaikért.