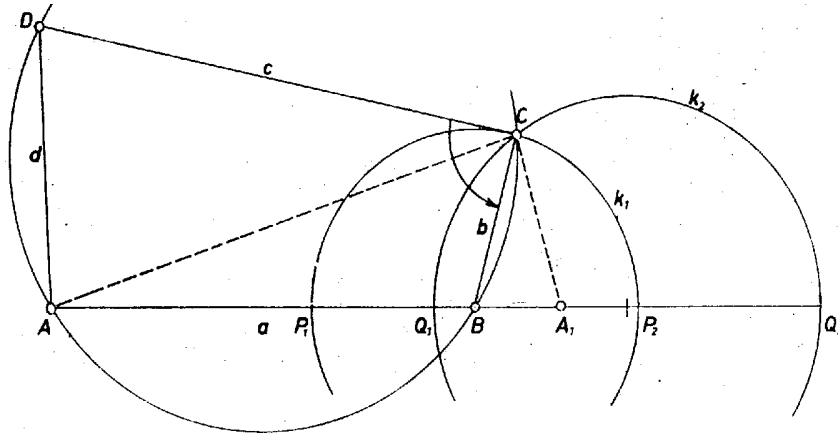


I. megoldás. Legyen $ABCD$ a feltételeknek megfelelő húrnégyszög, adott az $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ hosszúság. Ahhoz, hogy ezekből négyszöget lehessen szerkeszteni, a legnagyobbak is kisebbnek kell lennie a másik három összegénél.

Tudjuk, hogy az $ABCD$ konvex négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha benne a szemközti szögek összege 180° , ha tehát pl. a BC oldal és AB meghosszabbítása közti külső szög egyenlő a CDA -gel. Ekkor el tudunk helyezni a CDA -hoz hasonló $CBA_1\Delta$ -et úgy, hogy A_1 az AB meghosszabbításán legyen, és a csúcsok a felsorolás sorrendjében feleljenek meg egymásnak. Ekkor a két háromszögben a megfelelő távolságok aránya $CB/CD = b/c$. ($ACDA\Delta$ -et egy ilyen arányban és $DCB\Delta$ -gel történő forgatva nyújtás viszi át a $CBA_1\Delta$ -be.)



1. ábra

Így (1. ábra)

$$BA_1 = d \frac{b}{c}.$$

Ez a távolság ismert módon szerkeszthető, így az

$$AA_1 = a + \frac{bd}{c} = \frac{ac + bd}{c}$$

távolság, és ezen az A -tól a távolságra levő B pont is.

A C pont B -től b távolságra van, A_1 -től és A -tól való távolságának aránya pedig $CA_1/CA = b/c$. Így C mint a B középpű, b sugarú k_1 kör, és az A_1 és A pontokhoz és a b/c arányhoz tartozó k_2 Apollóniosz-kör metszéspontja adódik; az utóbbi helyett, $b = c$ esetén, AA_1 felező merőlegese veendő. Elég az egyik metszéspontot venni, mert a másik az AA_1 -re szimmetrikus négyszöget ad.

Végül mérjük rá AC -re az AC egyenes ellenkező partján, mint amelyiken B van, C -ben az $A_1CB\Delta$ -et, A -ban pedig a $CA_1B\Delta$ -et, száraik metszéspontja D .

Az $ABCD$ négyszög, ha létrejön, megfelel a feltételeknek, mert konvex, továbbá $ADC\Delta \sim A_1BC\Delta$, mert megfelelő szögeik egyenlők, tehát

$$AD = \frac{AC}{A_1C} \cdot A_1B = \frac{c}{b} \cdot d \cdot \frac{b}{c} = d, \quad CD = \frac{AC}{A_1C} \cdot CB = \frac{c}{b} \cdot b = c,$$

és $AB = a$, $BC = b$ a szerkesztés szerint. Ugyancsak az ADC és $A_1BC\Delta$ -ek hasonlóságából következik, hogy $ADC\Delta = A_1BC\Delta = 180^\circ - ABC\Delta$, tehát a kapott négyszög húrnégyszög.

A szerkeszthetőség feltétele az, hogy a k_1 és k_2 köröknek legyen metszéspontjuk. Legyen a k_1 körnek az AA_1 egyenesen levő két metszéspontja P_1 és P_2 (P_1 van A -hoz közelebb), a k_2 körnek AA_1 -en levő metszéspontjai pedig Q_1 és Q_2 (Q_1 van A -hoz közelebb). Tegyük fel, hogy $c > b$, ekkor k_2 középpontja az AA_1 szakasz A_1 -en túli meghosszabbításán van. k_1 középpontja viszont, B , az AA_1 szakasz belső pontja, ezért k_1 -nek és k_2 -nek akkor és csak akkor van (két) metszéspontja, ha P_1, Q_1, P_2, Q_2 ebben a sorrendben követik egymást, vagyis ha teljesül az

$$AP_1 < AQ_1 < AP_2 < AQ_2$$

egyenlőtlenség (AP_1 -et szükség esetén előjellel együtt értve).

Könnnyen látható, hogy ez az oldalak közti

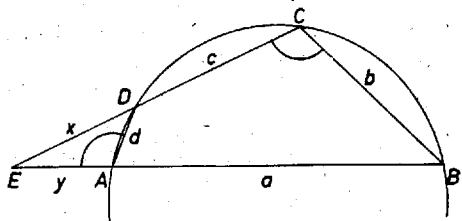
$$a - b < \frac{ac + bd}{b + c} < a + b < \frac{ac + bd}{c - b}$$

egyenlőtlenség teljesülését követeli. Mármost egyszerű számítás mutatja, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha az a, d, c oldal mindegyike kisebb a többi három adott oldal összegénél ($AP_1 < AQ_1$ -ből az a oldal, s í. t.), ekkor pedig még inkább áll ez b -re. A $b = c$ eset hasonló átgondolását az olvasóra hagyjuk.

E feltételek teljesülése és az oldalak sorrendjének megadása esetén a feladatnak egy megoldása van. (Természetesen, ha az oldalak sorrendjét nem írtuk elő, akkor a megoldások száma nőhet, megegyezik a szakaszból képezhető, lényegesen különböző sorrendek számával.)

Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Abban az esetben, ha a négyszög mindkét szemben fekvő oldalpárja egyenlő, a húrnégyszög téglalap, ami könnyen megszerkeszthető. Az ellenkező esetben van olyan két szemközti oldala, melyek meghosszabbításai metszik egymást; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az AB és CD oldalak ilyenek, legyen a metszéspontjuk E (2. ábra).



2. ábra

Könnyű belátni, hogy $b > d$, vagy $d > b$ aszerint, hogy E az A , ill. a B csúcshoz van közelebb; feltesszük, hogy $b > d$.

EAD és ECB hasonló háromszögek, hiszen E -nél közös szögük van, továbbá $EAD\angle = ECB\angle$, mivel mindkettő a $DAB\angle$ kiegészítő szöge. Bevezetve az $EA = y$ és $ED = x$ jelöléseket,

$$\frac{y}{x+c} = \frac{d}{b} \quad \text{és} \quad \frac{y}{x} = \frac{x+c}{y+a},$$

ahonnan az egyetlen pozitív megoldás:

$$x = d \cdot \frac{ab+cd}{b^2-d^2}, \quad y = d \cdot \frac{ad+bc}{b^2-d^2},$$

két ismert módon megszerkeszthető szakasz. Ezekből megszerkesztve az $EAD\triangle$ -et az EA oldal A -n túli meghosszabbítására felmérjük az $AB = a$ szakaszt, majd B -ben a BE félegyenesre, a D -t tartalmazó oldalon az $ADE\triangle$ -et és az új szárnak az ED egyenessel való metszéspontját C -vel jelöljük. Így $EBC\triangle \sim EDA\triangle$, és ezért az $ABCD$ négyszög oldalai :

$$BC = DA \cdot \frac{y+a}{x} = b,$$

$$CD = EA \cdot \frac{BC}{DA} - ED = y \cdot \frac{b}{d} - x = c,$$

végül $DA = d$, $AB = a$. Másrészt az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, mert

$$ABC\angle + ADC\angle = EDA\angle + ADC\angle = 180^\circ,$$

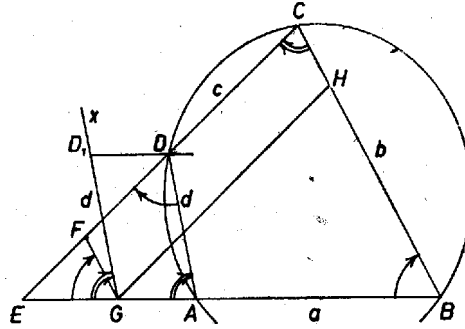
tehát $ABCD$ megfelel a feladat követelményeinek.

A szerkeszthetőség egyetlen feltétele, hogy az $EAD\triangle$ létrejőjön, mert így B és C mindig – és pedig egyértelműen – megszerkeszthetők. A háromszög létrejön, ha $x+y > d$, $x+d > y$ és $y+d > x$, amiből egyszerű számítással arra jutunk, hogy rendre b , c , a nagyobb legyen a többi három oldal összegénél. (Ekkor pedig ugyanez d -re is teljesül.)

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A II. megoldást úgy módosítjuk, hogy az x , y szakaszoknál egyszerűbben megszerkeszthető szakaszokat kelljen felhasználnunk. Az ottani jelöléseket tovább használjuk.

Tekintsük azt a hasonlósági transzformációt, amely az $EBC\triangle$ -et az $EDA\triangle$ -be viszi át (tükrözés a $BEC\angle$ szögfelezőjére és kicsinyítés d/b arányban). Vigye át ez az $EDA\triangle$ -et az $EGF\triangle$ -be (vagyis az A , B , C , D pontot rendre az F , D , A , G pontba).



3. ábra

Ekkor egyrészt (3. ábra)

$$\frac{FD}{AB} = \frac{GA}{DC} = \frac{AD}{CB} \left(= \frac{d}{b} \right) = \frac{FG}{AD}, \quad \text{azaz}$$

$$FD = \frac{ad}{b}, \quad GA = \frac{cd}{b}, \quad FG = \frac{d^2}{b},$$

másrészt $GF \parallel BC$, mert az EGF -gel való elfordulás irány és nagyság szerint egyenlő az ADE -elfordulással, ez pedig az ABC -nyi elfordulással.

Ezek szerint a $BCFG$ négyszög trapéz, egy oldala adott, és további három oldalának hosszát megszerkeszthetjük. Így magát a trapézt is, abból pedig a keresett négyszöget.

Ha ugyanis H a BC szakasznak az a pontja, amelyre $GH \parallel FC$, akkor

$$GH = FC = FD + DC = \frac{ad}{b} + c, \quad GB = GA + AB = \frac{cd}{b} + a$$

$$BH = BC - FG = b - \frac{d^2}{b}.$$

Ezekből megszerkesztve a GBH -et, a BH félegyenesre felmérve $BC = b$ -t, a C -n átmenő, HG -vel párhuzamos egyenesből BC kimetszi E -t, a G -n át BH -vel párhuzamosan húzott egyenes F -et. Mérjük fel ezután a G pontban a BCE -gel egyenlő és megegyező irányú EGX szöget és a GX szárra a $GD_1 = d$ szakaszt, ekkor a D_1 -en átmenő, EB -vel párhuzamos egyenes EC -ből kimetszi a D csúcst, az ezen átmenő, D_1G -vel párhuzamos egyenes pedig EB -ből az A csúcst.

Így egyrészt $ABCD$ húrnégyszög, mert A -nál levő külső szöge egyenlő a C -nél levő szögével, egyszersmind az EFG szöggel, tehát másrészt az E -nél közös szögű EGF , EDA és EBC -ek hasonlóak, és mivel $GF = BC - BH = d^2/b$, azért $GF : DA = DA : BC = d/b = 1/\lambda$, tehát ugyanaz a hasonlósági transzformáció viszi át az EGF -et az EDA -be, mint EDA -t az EBC -be (vagyis a G, F, D, A pontnégyest D, A, B, C -be). A transzformáció az első négyes további szakaszait is a λ -szorosukra nyújtja: $AB = \lambda \cdot FD$, $DC = \lambda \cdot GA$, ezért az AB, DC szakaszokra fennáll:

$$GA + AB = \frac{DC}{\lambda} + AB = GB = \frac{c}{\lambda} + a,$$

$$FD + DC = \frac{AB}{\lambda} + DC = FC = GH = \frac{a}{\lambda} + c.$$

Az elsőből, majd a másodikat is felhasználva

$$AB - a = \frac{1}{\lambda}(c - DC) = \frac{1}{\lambda^2}(AB - a),$$

és mivel $\lambda > 1$, $AB = a$ és $DC = c$. Tehát az $ABCD$ négyszög az, amit szerkesztenünk kellett.