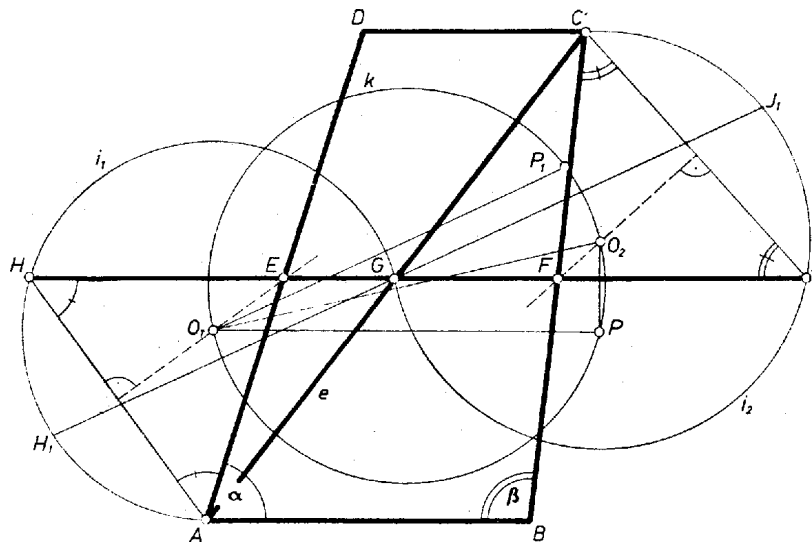


I. megoldás. Megkísérünk egy a kerülettel összefüggő távolságot feltüntetni az ábrán. Legyen a keresett trapéz $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ az adott szögek és $AC = e$ az adott átló. Az EF középvonal hossza $(AB+CD)/2$ és ez a G felezőpontjában metszi AC -t. Ha még felmérjük EF meghosszabbításaira az $EH = AD/2 = EA$ és $FJ = BC/2 = FC$ szakaszokat, akkor a HJ szakasz hossza a kerület fele (1. ábra).



1. ábra

Az AC átló felére támaszkodó AHG és CJG háromszögekben egy-egy szöget is ismerünk, ugyanis az AEH egyenlő szárú háromszög E -nél levő külső szöge $180^\circ - \alpha$ nagyságú, így $\angle AHG = 90^\circ - \alpha/2$ hasonlóan $\angle CJG = \beta/2$. Ezek szerint H az AG feletti, $90^\circ - \alpha/2$ látószögű köríven van, J pedig a GC -hez tartozó $\beta/2$ látószögű köríven. Mivel H és J az AC egyenes ellenkező partján van, elég egy-egy látószöggörívet megrajzolni az AC egyenes ellenkező partjain. Legyen a két körív középpontja O_1 , ill. O_2 . Ezek merőleges vetülete HJ -n egy $HJ/2 = k/4$ hosszúságú szakaszt határoz meg. O_1 merőleges vetületét az O_2 -ből HJ -re bocsátott merőlegesen P -vel jelölve, ez az O_1O_2 átmérőjű körön van, és O_1P hossza is $k/4$.

Ezek alapján a következő szerkesztésre jutunk:

1. Egy e hosszúságú AC szakasznak megszerkesztjük a G felezőpontját és AG , ill. GC fölé az egyenes ellenkező oldalán egy $90^\circ - \alpha/2$, ill. egy $\beta/2$ látószögű, i_1 , ill. i_2 körívet; középpontjaik legyenek O_1 , ill. O_2 .
2. Az O_1O_2 átmérőjű k_0 kört elmetsszük az O_1 körüli $k/4$ sugarú körrel. A metszéspontok legyenek (ha $k/4 < O_1O_2$) P és P_1 . Ha $O_1O_2 = k/4$, akkor O_2 tekintendő P -nek, ha $O_1O_2 > k/4$, akkor a feladatnak nincs megoldása.
3. A G -n át O_1P -vel (ill. O_1P_1 -gyel) húzott párhuzamos messe még k_1 -et H -ban (ill. H_1 -ben), k_2 -t J -ben (ill. J_1 -ben).
4. AH (AH_1) és CJ (CJ_1) felező merőlegesének HJ -vel H_1J_1 -gyel való metszéspontja legyen E , ill. F (E_1 , ill. F_1). Ha az előbbi HG -re (H_1G -re), az utóbbi GJ -re (GJ_1 -re) esik, akkor ezek az AD (AD_1), ill. BC (BC_1) oldalak felező pontjai. Különben a feladatnak ismét nincs megoldása.
5. AE (AE_1) a C -ből, CF (CF_1) pedig az A -ból HJ -vel (H_1J_1 -gyel) húzott párhuzamosból kimetszi D -t, ill. B -t (D_1 -et, ill. B_1 -et).

Az elemzés lépéseinek megfordításával könnyen látható, hogy a nyert trapéz megfelel a szerkesztés kívánalmainak. Mint láttuk, a feladatnak 2, 1 vagy 0 megoldása lehet.

Váli László (Budapest, I. István Gimn.)
dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel, kiegészítésekkel

II. megoldás. Ha $\alpha + \beta = 180^\circ$, akkor paralelogrammát kell szerkesztenünk, ami visszavezethető a következő feladatra: szerkesszük meg a háromszöget, ha adott egy oldala, a másik két oldal összege és a köztük levő szög; ennek megoldása elég ismert, itt nem foglalkozunk vele tovább.

Ha $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, akkor feltehetjük, hogy $\alpha + \beta < 180^\circ$, mert a trapéz mindegyik szöge ismert, és az egyik alapon levő két szögre ez az egyenlőtlenség teljesül.

Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül az AC átlót. Megrajzolva néhány, a többi feltételeket kielégítő trapézt úgy, hogy AB és AD oldalegyenesük közös legyen: a C csúcsok egy egyenesen látszanak sorakozni. Ha ez a megfigyelés helyes, akkor a szerkesztés könnyen elvégezhető, ezért először megfigyelésünket igazoljuk.

Rajzoljunk k kerületű AB_0C_0 háromszöget, amelyben $\angle C_0AB_0 = \alpha$ és $\angle C_0B_0A = \beta$. Legyen $ABCD$ egy k kerületű trapéz, melynek B és D csúcsa az AB_0 félegyenesen, ill. az AC_0 szakaszon van, és $BC \parallel B_0C_0$. Jelöljük B_0C_0 és CD metszéspontját E -vel. Ekkor $BC = B_0E$, s így (2. ábra)

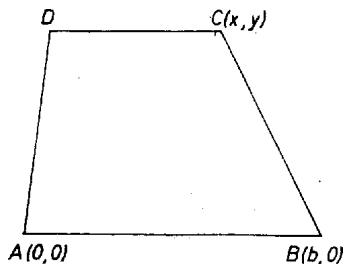
$$B_0B + CD = B_0B + CE + ED = 2CE + ED = DC_0 + C_0E.$$

3. ábra

Az $ABCD$ trapéz AC átlójának hossza e , A -nál és B -nél levő szöge α és β , azt kell még belátnunk, hogy kerülete k . Messe a C -ből DA -val húzott párhuzamos AB -t A' -ben, ekkor $A'BC\Delta \sim AB^*C^*\Delta$ és $A'FC\Delta \sim AF^*C^*\Delta$ így

Beck József (Budapest, I. István Gimn.)
dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel, kiegészítésekkel

2. A C pontok mértani helyét könnyen megállapíthatjuk koordináták segítségével.



4. ábra

$$y = m_2(x - b), \quad \text{ahonnan} \quad b = x - \frac{y}{m_2},$$

és D koordinátái $(y/m_1, y)$. A trapéz kerülete

$$\begin{aligned} k &= x - \frac{y}{m_2} + y\sqrt{1 + \frac{1}{m_2^2}} + x - \frac{y}{m_1} + y\sqrt{1 + \frac{1}{m_1^2}} = \\ &= 2x + y \left(\sqrt{1 + \frac{1}{m_1^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{m_2^2}} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right), \end{aligned}$$

ami valóban egyenes egyenlete. Ennek az a szakasza ad trapézt, amelyre teljesül, hogy $0 < y < m_1 x$. (Feltettük, hogy α, β , egyike sem derékszög.)