

**I. megoldás.** Legyen a két egyenlet további gyöke  $\alpha'$ , ill.  $\beta'$ . A gyökök és együtthatók összefüggése alapján  $q = \alpha\alpha'$ ,  $s = \beta\beta'$ , tehát (1) első tagja

$$(2) \quad (q - k^2s)^2 = \left(\alpha\alpha' - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \beta\beta'\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} (\alpha'\beta - \alpha\beta')^2.$$

Továbbá  $-p = \alpha + \alpha'$ ,  $-r = \beta + \beta'$ , így a második tag:

$$(3) \quad k(p - kr)(kps - qr) = \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{\alpha}{\beta} (\beta + \beta') - (\alpha + \alpha') \right] \cdot \left[ \alpha\alpha'(\beta + \beta') - \frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \alpha')\beta\beta' \right] = \\ = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta} (\alpha\beta + \alpha\beta' - \alpha\beta - \alpha'\beta) \cdot \alpha(\alpha'\beta + \alpha'\beta' - \alpha\beta' - \alpha'\beta') = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} (\alpha'\beta - \alpha\beta')^2.$$

(2) és (3) összege a bizonyítandó (1) azonosságot adja.

*Fialovszky Alice* (Budapest, Patrona Hungariae Gimn.)

*Máté András* (Budapest, Kölcsey F. Gimn.)

**II. megoldás.** A fenti jelöléseket használva tekintsük a következő negyedfokú egyenletet:

$$(4) \quad (\beta z - \alpha)(\beta' z - \alpha)(\beta z - \alpha')(\beta' z - \alpha') = 0.$$

Az első két tényező szorzata:

$$(\beta z - \alpha)(\beta' z - \alpha) = \beta\beta' z^2 - \alpha(\beta + \beta')z + \alpha^2 = sz^2 + \alpha rz + \alpha^2,$$

hasonlóan a további két tényező szorzata:

$$(\beta z - \alpha')(\beta' z - \alpha') = sz^2 + \alpha' rz + \alpha'^2.$$

Így (4) bal oldala alkalmas rendezéssel, alakítással:

$$(sz^2 + \alpha rz + \alpha^2)(sz^2 + \alpha' rz + \alpha'^2) = \\ = (s^2 z^4 - 2sz^2\alpha\alpha' + \alpha^2\alpha'^2) + (\alpha + \alpha')rsz^3 + (\alpha^2 + 2\alpha\alpha' + \alpha'^2)sz^2 + \alpha\alpha'r^2z^2 + \alpha\alpha'(\alpha + \alpha')rz = \\ = (s^2 z^4 - 2sqz^2 + q^2) + z(-prsz^2 + p^2sz + qr^2z - pqr) = \\ = (q - sz^2)^2 + z(p - rz)(psz - qr).$$

A (4) egyenlet bal oldala tehát a  $z = k$  helyen egyenlő (1) bal oldalával. Ezen a helyen azonban (4) első tényezője 0-val egyenlő, így az egész szorzat értéke 0. Állításunkat tehát bebizonyítottuk.

*Beck József* (Budapest, I. István Gimn.)

*Megjegyzés.* Ez a megoldás azt is mutatja, hogy ha az (1) egyenlőség fennáll, akkor van az első egyenletnek egy gyöke, amelyik a második egyenlet egy gyökének  $k$ -szorososa.

**III. megoldás.** Feltételeink szerint  $x = \beta k$  gyöke az első egyenletnek:

$$(5) \quad \beta^2 k^2 + \beta kp + q = 0,$$

és  $x = \beta$  gyöke a második egyenletnek:

$$(6) \quad \beta^2 + \beta r + s = 0.$$

Vonjuk le (5)-ből (6)-nak a  $k^2$ -szeresét:

$$(7) \quad \beta(kp - k^2r) + q - sk^2 = 0,$$

és szorozzuk meg (6)-ot  $(pk - rk^2)^2$ -nel:

$$\beta^2(pk - rk^2)^2 + \beta r(pk - rk^2)^2 + s(pk - rk^2)^2 = 0.$$

Írjuk be itt  $\beta(kp - k^2r)$  helyére (7) alapján a vele egyenlő  $(sk^2 - q)$ -t:

$$(q - sk^2)^2 + r(sk^2 - q)(kp - k^2r) + s(pk - rk^2)^2 = 0, \\ (q - sk^2)^2 + k(p - kr)(rsk^2 - rq + spk - rsk^2) = 0,$$

innen összevonás után a bizonyítandó azonosságot kapjuk.

*Viszkei György* (Budapest, Landler J. Gépip. Techn.)

*Megjegyzések.* 1. Célhoz érünk úgy is, hogy (5)-nek  $s$ -szereséből levonjuk (6)-nak  $q$ -szorosát:

$$\beta[(k^2s - q)\beta + kps - qr] = 0.$$

Ekkor (7)-nek  $\beta(k^2s - q)$ -szorosát levonva (8)-nak  $(kp - k^2r)$ -szereséből:

$$\beta[(q - sk^2)^2 + (kps - qr)(kp - k^2r)] = 0.$$

Ha itt  $\beta = 0$ , akkor  $\alpha$  is 0, tehát  $q = s = 0$ , s így (1) bal oldalán is 0 áll; ha pedig a második tényező 0, az azonos (1) bal oldalával, így a feladat állítását igazoltuk.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek, hozzák kapcsolatba a problémát az 1598. feladathoz<sup>1</sup> fűzött 1. megjegyzés segédte-  
telével: „ha az  $a_1z^2 + b_1z + c_1 = 0$  és az  $a_2z^2 + b_2z + c_2 = 0$  egyenleteknek van közös gyökük, akkor

$$(a_2c_1 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1b_2 - c_2b_1) = 0.”$$

---

<sup>1</sup>K. M. L. 37 (1968) 137. o.