

A polinom előállításában szereplő összeget a

$$6y^2 + 5y - 21 = 0$$

másodfokú egyenlet gyöktényező alakja alapján szorzattá alakíthatjuk. Ennek az egyenletnek a gyökei:

$$y_1 = \frac{3}{2}, \quad y_2 = -\frac{7}{3},$$

így az  $f(x)$  polinom szorzat-alakja:

$$(1) \quad f(x) = [2(x^2 + 1) - 3g(x)] \cdot [3(x^2 + 1) + 7g(x)].$$

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy van olyan egész  $x_0$ , amelyre  $f(x_0) = 0$ . Ekkor a két tényező közül legalább az egyik értéke ugyancsak 0 volna az  $x_0$  helyen.

a) Ha az első tényező 0:

$$2(x_0^2 + 1) - 3g(x_0) = 0,$$

akkor  $x_0^2 + 1$  osztható volna 3-mal, hiszen  $g(x_0)$  – mint egész együtthatós polinom egész helyen felvett értéke – egész szám. Ha belátjuk, hogy  $x_0^2 + 1$  egyetlen egész  $x_0$  mellett sem osztható 3-mal, akkor ellentmondásra jutunk. Valóban,  $x_0$ -t 3-mal osztva a maradék vagy 0, vagy 1, vagy 2, ekkor pedig  $x_0^2$ -et osztva 3-mal a maradék rendre 0, vagy 1, vagy 1, tehát  $x_0^2 + 1$ -et 3-mal osztva a maradék 1 vagy 2.

b) Ha (1) második tényezője volna 0,  $x_0^2 + 1$  osztható lenne 7-tel. Hasonló módon kapjuk, hogy  $x_0$ -t 7-tel osztva a maradék 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lehet, ekkor  $x_0^2$ -t 7-tel osztva a maradék rendre 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, és  $x_0^2 + 1$ -et 7-tel osztva a maradék 1, 2, 5, 3, 3, 5, 2, tehát a maradék nem lehet 0. Így ismét ellentmondásra jutottunk, eredeti állításunkat tehát bebizonyítottuk.

*Maróti Péter* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)

*Martoni Viktor* (Veszprém, Lovassy L. Gimn.)

*Megjegyzés.* Megmutatható,<sup>1</sup> hogy az  $x_0^2 + 1$  számnak csak  $4k + 1$  alakú prímosztója lehet, akármilyen egész szám is  $x_0$ .

---

<sup>1</sup>Lásd pl. *Erdős P.-Surányi J.*: Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 47–48. o.