

I. megoldás. Kísérreljünk meg megtervezni egy kívánt tulajdonságú autóbusz-hálózatot. Készítsünk táblázatot az autóbuszvonalakról, amelyeket kis betűkkel fogunk jelölni és egymás alá írunk, és a megállókról, amelyeket nagy betűkkel jelölünk és a táblázat tetején tüntetünk fel egymás után. Ha pl. az a járatnak megállója a A állomás, akkor az a sorában az A alatti mezőbe 1-et írunk, különben semmit.

Az üres táblázat – hogy ti. nem közlekedik autóbusz a városban –, valamint az egyetlenegy járat, természetesen kielégíti az I., II., III. feltételeket, ezeket mégis figyelmen kívül hagyjuk, mivel a feladat a város autóbuszjáratairól, tehát többről szól.

Ekkor kell lennie legalább két járatnak – jelöljük a -val és b -vel –, ezeken egy közös megállónak, A -nak, az elsőn még két megállónak, B -nek és C -nek, a másodikon két, az előbbiektől különböző megállónak, D -nek és E -nek. Így táblázatunk következő részét kapjuk:

	A	B	C	D	E
a	1	1	1		
b	1			1	1

Táblázatunk azonban kiegészítésre szorul, hiszen III. szerint kell lennie B -t D -vel és B -t E -vel összekötő járatnak, és ahhoz, hogy II. teljesüljön, ezek nem mehetnek át A -n, C -n, E -n, ill. A -n, C -n, D -n, és egymással sem lehet közös megállójuk B -n kívül. Így ezen a c , ill. d vonalon van egy-egy újabb F , ill. G megálló. Eddig nyert táblázatunk tehát:

	A	B	C	D	E	F	G
a	1	1	1				
b	1			1	1		
c		1		1		1	
d		1			1		1

A III. feltétel szerint kell lennie olyan járatnak, mely az A és F megállót köti össze, jelöljük ezt e -vel. Akkor B , C , D és E nem lehetnek megállói e -nek, hiszen az ellenkező esetben e -nek és a -nak, ill. e -nek és b -nek két közös megállója lenne. Mivel e -nek és d -nek is kell, hogy közös megállója legyen, így e harmadik megállója csak G lehet.

Hasonlóan a fentiekhez, létezik olyan járat, mely C -t és D -t köti össze, jelöljük ezt f -fel. Mivel f -nek az a , b és c mindegyikével közös megállója C és D egyike, továbbá sem C , sem D nem megállója d -nek, így f harmadik megállója G .

Az eddig megadott járatok között nincs olyan, mely C -t és E -t kötné össze. Egy ilyen g járatnak C vagy E közös megállója az a , b , d járatok bármelyikével, továbbá c -nek és g -nek is kell, hogy közös megállója legyen, így F is a g járat vonalán fekszik. Egészítsük ki táblázatunkat a fentiekkel.

	A	B	C	D	E	F	G
a	1	1	1				
b	1			1	1		
c		1		1		1	
d		1			1		1
e	1					1	1
f			1	1			1
g			1		1	1	

Könnyű látni, hogy táblázatunk a feladat feltételeit kielégítő hálózatot ír le. További járat nem létezhet, mert egy ilyen h járat – ha további H megálló is létezik – kösse össze A -t és H -t. Könnyű látni, hogy h -nak nem megállója B , C , D , E , F , G egyike sem. Viszont ekkor h -nak a c , d , f , g járatok egyikével sincs közös megállója, tehát h és H nem is létezhet. Így táblázatunk a megállók és járatok megfelelő betűzése mellett az egyetlen olyan autóbuszhálózatot reprezentálja, melyben a járatok száma egynél nagyobb. Így azt nyertük, hogy a város autóbuszjáratainak száma hét.

II. megoldás. Nézzük meg általánosabban, hogy hány járatra van szükség, ha az I. feltétel helyett azt kívánjuk meg, hogy

I.* minden járaton pontosan p megálló van, ahol $p \geq 2$, természetes szám.

Vizsgáljuk meg, hány megálló és autóbuszvonal lehet a városban!

Jelöljük az egyik megállóhelyen áthaladó járatok számát k -val. Mivel innen a III. feltétel szerint minden további megállóhelyre pontosan egy közvetlen járatból lehet eljutni, így I*-ból nyerjük, hogy az összes megállóhelyek száma $k(p-1) + 1$. Ez azt is jelenti, hogy a város minden megállójában ugyanannyi (éspedig pontosan k) járat megy át. Jegyezzük meg, hogy $k = 0$ esetén a feltételek teljesülnek, mivel ekkor nincsenek járatok, következésképpen megállóhelyek sem léteznek.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $k \geq 1$, s válasszunk ki egy tetszőleges járatot. A II. feltétel szerint az összes többi járat egy és csak egy pontban keresztezi ezt a járatot. Így, mivel a kiválasztott autóbuszvonal minden megállóján még további $k - 1$ járat halad át, nyerjük, hogy az összes járatok száma $p(k - 1) + 1$.

Meghatározhatjuk a járatok számát a következőképpen is. Alkossunk párokat a város megállóhelyeiből. Ezt

$$\frac{[k(p-1)+1] \cdot k \cdot (p-1)}{2}$$

-féleképpen tudjuk megtenni. Mivel minden járáshoz $\frac{p(p-1)}{2}$ olyan pár tartozik, amelyeket ő összeköt, s mivel III. szerint minden párt pontosan egy járat köt össze, így az összes járatok száma

$$\frac{[k(p-1)+1]k(p-1)}{p(p-1)}.$$

A kétféle meghatározás alapján felírhatjuk a

$$p(k-1)+1 = \frac{[k(p-1)+1] \cdot k}{p}$$

egyenletet. Ebből átrendezéssel:

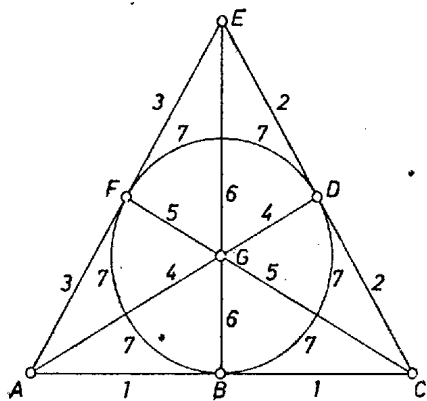
$$(1) \quad (p-1)(k-1)(k-p) = 0.$$

Mivel $p \geq 2$, így vagy $k = 1$, vagy $k = p$ járat megy át $1 - 1$ megállón.

Nilvánvaló, hogy a $k = 0$ és $k = 1$ triviális esethez minden p esetén létezik hálózat, mely kielégíti az I*, II. és III. feltételeket. Mivel azonban feladatunkban (ahol $p \geq 3$), a város autóbuszjáratairól szólnak a feltételek, így feltehetjük, hogy legalább két járat van, s így a fentiek szerint egyetlen megoldás lehetséges, mégpedig az, hogy 7 járat van a városban.

Megmutatjuk, hogy ilyen hálózat konstruálható is. Jelöljük a megállókat rendre A, B, C, D, E, F, G betűkkel, és jellemezzük a járatokat azzal a három megállóval, melyeken áthaladnak:

- az 1. számú járat az A, B, C ,
- a 2. számú járat a C, D, E ,
- a 3. számú járat az E, F, A ,
- a 4. számú járat az A, G, D ,
- az 5. számú járat a C, G, F ,
- a 6. számú járat az E, G, B ,
- a 7. számú járat a D, F, B megállókon halad át.



Szemléletesen mutatja ilyen hálózat létezését az ábra, ahol az 1., 2. és 3. járat egy egyenlő oldalú háromszög három oldala, a 4., 5. és 6. járat a három súlyvonal, s a 7. járat a beírt kör (lehet ennek $2/3$ része is).

Váradi József (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. (1) azt jelenti, hogy amennyiben van autóbuszjárat a városban, akkor csak egy vagy $p^2 - p + 1$ járat lehet. Ebből azonban nem következik, hogy minden p természetes szám esetén létezik is olyan hálózat, melyben $k = p$.