

Feltehetjük, hogy  $10^4 \leq k$ , mert ha  $k$  legfeljebb négyjegyű, akkor a feladat állítása nyilvánvaló. Tekintsük azokat a  $(0 =)a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában csak a 0 és az 1 számjegyek szerepelnek. Ha a tízes számrendszerbeli alakokat a kettes számrendszerben képzeljük el, akkor világos, hogy így minden természetes számot felsorolhatunk, és mindegyiket csak egyszer (tehát  $a_i$ -ből éppen  $i$  lesz). Ezért

$$a_{2^n} = a_{100\dots 0_2} = \overbrace{100\dots 0}^{n \text{ db}} = 10^n.$$

A skatulyaelv szerint az  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$  számok között van kettő, amelyek  $k$ -val osztva ugyanazt a maradékot adják, azaz e két szám (pozitív) különbsége osztható  $k$ -val. Az írásbeli kivonás szabályait használva megállapíthatjuk, hogy e különbség tízes számrendszerbeli alakja csak a 0, 1, 8 és 9 számjegyeket tartalmazhatja, az pedig nyilvánvaló, hogy a különbség nem haladhatja meg  $a_k$ -t. Így elegendő belátnunk, hogy  $a_k \leq k^4$ . A fenti összefüggés – és a megoldás elején tett feltevés – segítségével ez is egyszerű:

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{2^{\lceil \log_2 k \rceil}} = 10^{\lceil \log_2 k \rceil} < 10^{1+\log_2 k} = 10^{(\log_2 10)(\log_2 k)} = 10 \cdot k^{\log_2 10} = \\ &= (10^2 \cdot k^{2\log_2 10})^{1/2} < (k \cdot k^{2\log_2 10})^{1/2} = (k^{\log_2 200})^{1/2} < (k^{\log_2 256})^{1/2} = k^4. \end{aligned}$$

*Hertz István* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján