

A Matematikai Lapok 32. évfolyamának (1981-1985) 4. számában szerepel a fenti feladat.

Nyilván feltehetjük, hogy $\log x$ az x szám ($x > 0$) e alapú logaritmusát jelöli. A tétel – könnyen ellenőrizhető – $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ esetén teljesül, ezért mi a továbbiakban az $n \geq 9$ esettel foglalkozunk. Számolással könnyen igazolható, hogy

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} > \log 7 + \frac{1}{2}.$$

(A bal oldalon 2,45 áll, a jobb oldalon kb. 2,446.) Mivel az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton fogyó a pozitív számokon, és $n - 2 \geq 7$, azért

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n-2} \geq \int_7^{n-1} \frac{dx}{x} = \log(n-1) - \log 7,$$

amit $\frac{1}{n-1}$ -gyel megnövelve, majd (2)-höz hozzáadva:

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \log(n-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} > \log(n-1) + \frac{1}{2}.$$

Alakítsuk most át (1)-et ekvivalens lépésekkel!

$$\begin{aligned} \frac{\log(n+1)}{\log n} &> \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)} = 1 + \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)} \\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} &> \frac{\log n}{n[\log(n+1) - \log n]} = \frac{\log n}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

(3) szerint ennek bal oldala nagyobb, mint $\log(n-1) + \frac{1}{2}$, ezért elég belátnunk, hogy

$$(4) \quad \log(n-1) + \frac{1}{2} > \frac{\log n}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Legyen $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, ha $x > 0$. Ismeretes, hogy $g(x)$ szigorúan monoton fogyó, és hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = e$, ezért $g(x) > e$ mindig fennáll. Ennek alapján

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> e \\ (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &> 1, \quad \text{azaz} \\ 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} &> \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \quad \text{ahonnan} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log n &> \frac{\log n}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy (4) jobb oldala kisebb, mint $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \log n$, ezért elég igazolnunk, hogy

$$\begin{aligned} \log(n-1) + \frac{1}{2} &> \left(1 + \frac{1}{2}\right) \log n, \quad \text{amit átalakítva} \\ \log[\sqrt{e}(n-1)] &> \log n^{(1+\frac{1}{n})} = \log\left(n - n^{\frac{1}{n}}\right) \\ \sqrt{e}(n-1) &> n - n^{\frac{1}{n}} \\ \sqrt{e} &> \frac{n}{n-1} \cdot n^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Legyen most $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, ha $x > 0$. Némi számolással adódik, hogy

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}(1 - \log x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x).$$

Mivel $x^{\frac{1}{x}-2} > 0$, azért $f'(x) < 0$, ha $1 - \log x < 0$, azaz ha $e < x$. Ez azt jelenti, hogy $f(x)$ szigorúan monoton fogyó az $x > e$ számokon, vagyis

$$(6) \quad n^{\frac{1}{n}} \leq 9^{\frac{1}{9}}, \quad \text{hiszen} \quad n \geq 9 > e.$$

Mivel $x > 0$ esetén az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton fogyó, azért ugyanilyen az $x \mapsto \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$ függvény is, tehát $n \geq 9$ miatt

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{9}{8}.$$

Ennek és (6)-nak a bal oldalán pozitív számok állnak, azaz összeszorozva őket $\frac{n}{n-1} \cdot n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{9}{8} \cdot 9^{\frac{1}{9}}$ fennáll, és így (5) helyett elegendő megmutatnunk, hogy telsejül a

$$\sqrt{e} > \frac{9}{8} \cdot 9^{\frac{1}{9}}$$

egyenlőtlenség. Numerikus becsléssel könnyen igazolható, hogy ez valóban fennáll, és így igaz az (1) egyenlőtlenség is. ($\sqrt{e} \approx 1,65$; $\frac{9}{8} \cdot 9^{\frac{1}{9}} \approx 1,44$)

Ezzel a bizonyítást befejeztük.