

Tetszőleges $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ pozitív egészekből álló halmaz esetén jelölje $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ az

$$\mathcal{M} \cup \mathcal{N} \cup \{m + n : m \in \mathcal{M}, n \in \mathcal{N}\}$$

halmazt, és definiáljuk sorra az $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots$ halmazokat az

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_{i+1} &= \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \quad (i = 0, 1, \dots)\end{aligned}$$

rekurzióval. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}_i$ mindazokat a pozitív egészeket tartalmazza, amelyek legfeljebb 2^i darab $\mathcal{A}$ -beli elem összegeként előállnak (egytágú összegben magát a tagot értjük). Ha a feladatbeli feltétel teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ α -sűrű. Ezzel a szóhasználattal és eddigi jelöléseinkkel élve a feladat annak a bizonyítása, hogy alkalmas i -re $\mathcal{A}_i$ már 1-sűrű.

1. Lemma. Ha $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ pozitív egészekből álló halmaz, továbbá $\mathcal{M}$ μ -sűrű és $\mathcal{N}$ ν -sűrű ($\mu, \nu \geq 0$), akkor $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ $(\mu + \nu - \mu\nu)$ -sűrű.

Bizonyítás. Vezessük be minden pozitív egész x esetén az

$$M(x) = |\mathcal{M} \cap \{1, 2, \dots, x\}| \quad \text{és} \quad N(x) = |\mathcal{N} \cap \{1, 2, \dots, x\}|$$

jelöléseket, akkor nyilván $M(x) \geq \mu x$ és $N(x) \geq \nu x$ a feltétel szerint. Ha $\mu = 0$ vagy $\nu = 0$, akkor semmitmondó az állítás. Tegyük fel ezért, hogy $\mu, \nu > 0$, ekkor $M(1) \geq \mu > 0$ és $N(1) \geq \nu > 0$, azaz 1 eleme $\mathcal{M}$ -nek és $\mathcal{N}$ -nek. Most tehát tetszőleges pozitív egész x esetén az $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ halmazhoz tartoznak az alábbi *különböző* $\{1, 2, \dots, x\}$ -be eső számok:

- 1) Az $\mathcal{M}$ -ből választott $1 = m_1 < m_2 < \dots < m_{M(x)}$ egészek; ezek száma $M(x)$.
 - 2) Minden $1 \leq i < M(x)$ esetén az $m_i + n$ alakú egészek, ahol $n \in \mathcal{N}$ és $0 < n < m_{i+1} - m_i$; ezek száma $N(m_{i+1} - m_i - 1)$.
 - 3) Az $m_{M(x)} + n$ alakú egészek, ahol $n \in \mathcal{N}$ és $0 < n \leq x - m_{M(x)}$; ezek száma $N(x - m_{M(x)})$.
- Mindezek alapján

$$\begin{aligned}& |(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cap \{1, 2, \dots, x\}| \geq \\& \geq M(x) + N(m_2 - m_1 - 1) + N(m_3 - m_2 - 1) + \dots \\& \qquad \qquad \qquad \dots + N(m_{M(x)} - m_{M(x)-1} - 1) + N(x - m_{M(x)}) \geq \\& \geq M(x) + \nu(m_2 - m_1 - 1) + \nu(m_3 - m_2 - 1) + \dots \\& \qquad \qquad \qquad \dots + \nu(m_{M(x)} - m_{M(x)-1} - 1) + \nu(x - m_{M(x)}) \geq \\& \geq M(x) + \nu(x - M(x)) = \nu x + (1 - \nu)M(x) \geq \nu x + (1 - \nu)\mu x = (\mu + \nu - \mu\nu)x,\end{aligned}$$

és ezt kellett igazolnunk.

2. Lemma. Ha $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ pozitív egészekből álló halmaz, továbbá $\mathcal{M}$ μ -sűrű és $\mathcal{N}$ ν -sűrű ($\mu, \nu \geq 0$), ahol $\mu + \nu \geq 1$, akkor $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ 1-sűrű.

Bizonyítás. Használjuk az előző lemma bizonyításának jelöléseit. Ha $\mu = 0$, akkor $\nu = 1$, vagyis már $\mathcal{N}$ is 1-sűrű. Legyen ezért $\mu > 0$, és x tetszőleges pozitív egész. Azt kell megmutatnunk, hogy $x \in \mathcal{M} + \mathcal{N}$. Ha $x \in \mathcal{M}$, akkor készen vagyunk. Egyébként pedig $x > 1$ és

$$M(x-1) = M(x) \geq \mu x > \mu(x-1) \quad \text{és} \quad N(x-1) \geq \nu(x-1).$$

Ezek szerint az $\{1, 2, \dots, x-1\}$ halmazba több, mint $\mu(x-1)$ darab $\mathcal{M}$ -beli, és legalább $\nu(x-1)$ darab $\mathcal{N}$ -beli szám esik. Mivel $\mu(x-1) + \nu(x-1) \geq x-1$, azért a skatulyaelvet használva az $x-n$ ($n \in \mathcal{N}, n \leq x-1$) alakú számok egyike megegyezik egy $\mathcal{M}$ -beli m számmal. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy x $m+n$ alakú, ahol $m \in \mathcal{M}$ és $n \in \mathcal{N}$.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A bizonyítás csekély módosításával az is igazolható, hogy minden pozitív egész szám előáll legfeljebb C darab $\mathcal{A}$ -beli elem összegeként, ha

$$C = 2 \left\lceil \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1-a}} \right\rceil.$$