Tegyük fel, hogy f_1, ill. f_2 a háromszög a, ill. c oldalához tartozik, ekkor ismeretes, hogy

$$f_1^2 = bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) = \frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2-a^2\right),$$

amiből

$$2f_1 \le \sqrt{(b+c)^2-a^2}$$

következik. Hasonlóan

$$2f_2 \le \sqrt{(a+b)^2-c^2},$$

és azt is tudjuk, hogy

$$2s_3 = \sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$

végső soron tehát elegendő a következőt bizonyítanunk:

$$\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(a+b)^2-c^2}+\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \le \sqrt{3}(a+b+c), \quad \text{azaz}$$
$$\left[\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(a+b)^2-c^2}\right]^2 \le \left[\sqrt{3}(a+b+c)-\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\right]^2.$$

(Az utolsó két egyenlőtlenség egyenértékű, hiszen – amint az könnyen végigondolható – a szögletes zárójelekben nemnegatív számok állnak.) A két oldalon a négyzetreemelést elvégezve, majd a kapott tagokat megfelelően átrendezve:

$$2\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\,[(a+b)^2-c^2]}+2\sqrt{3}(a+b+c)\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \le$$
$$\le 5a^2+5c^2+4ab+4bc+6ac, \quad \text{ill.}$$

$$2(a+b+c)\left[\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}+\sqrt{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\right] \le$$
$$\le 5a^2+5c^2+4ab+4bc+6ac.$$

A bal oldali szögletes zárójelben lévő összeget felülről becsülhetjük a súlyozott számtani és négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenség segítségével:

$$\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}+\sqrt{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} = \sqrt{b^2-a^2+2ac-c^2}+$$
$$+3\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3}} = 4\frac{\sqrt{b^2-a^2+2ac-c^2}+3\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b2}{3}}}{4} \le$$
$$\le 4\sqrt{\frac{b^2-a^2+2ac-c^2-3\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3}}{4}} = 4\sqrt{\frac{a^2+2ac+c^2}{4}} = 2(a+c),$$

vagyis elegendő a következőt belátnunk:

$$2(a+b+c)\cdot 2(a+c) \le 5a^2+5c^2+4ab+4bc+6ac.$$

Ennek átrendezése viszont a nyilvánvaló

$$0 \le a^2-2ac+c^2$$

egyenlőtlenséget adja. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A levezetésből az is kiderül, hogy egyenlőség pontosan $a=b=c$ esetén, azaz szabályos háromszögnél áll fenn.