

Húzzuk meg az összes, a sokszög valamely csúcsán áthaladó és a területet felező szakaszt. Nyilvánvaló, hogy közülük bármely kettő metszi egymás a sokszög belsejében. Ellenkező esetben ugyanis az általuk és a sokszög határa által közrefogott síkidom területe nulla kell hogy legyen (hiszen területfelezőkről van szó).

Két ilyen területfelező szakaszt akkor nevezünk szomszédosnak, ha megfelelő végpontjaik szomszédosak a sokszög kerületén.

1. ábra

2. ábra

Legyenek ilyenek pl. az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok (az 1. ábra szerint). Ez nyilván azt is jelenti, hogy A_1 és B_1 (illetve A_2 és B_2) között a sokszögnek nincs csúcsa – éppen a szomszédosság miatt. Ha az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok metszéspontja P , az A_1PB_1 szög pedig α , akkor belátjuk, hogy

$$T_{A_1PB_1} + T_{A_2PB_2} \leq \frac{1}{4} \cdot \sin \alpha.$$

Vegyük észre először, hogy $T_{A_1PB_1} = T_{A_2PB_2}$, ez az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok területfelező tulajdonságából következik, amint ezt az ábra szemlélteti:

$$T_{A_1B_1P} = \frac{T}{2} - T_2, \quad T_{A_2B_2P} = \frac{T}{2} - T_1 \quad \text{és} \quad T_1 = T_2$$

Ezek szerint

$$\frac{A_1P \cdot PB_1 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{A_2P \cdot PB_2 \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Innen $A_1P \cdot PB_1 = A_2P \cdot PB_2$. A feladat feltétele szerint $A_1P + PA_2 \leq 1$ és hasonlóan $B_1P + PB_2 \leq 1$. Mivel itt pozitív (nemnegatív) értékekről van szó, használhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$A_1P \cdot PA_2 \leq \frac{1}{4} \quad \text{és} \quad B_1P \cdot PB_2 \leq \frac{1}{4}.$$

Összeszorzás és rendezés után:

$$\frac{1}{16} \geq (A_1P \cdot PB_1)(A_2P \cdot PB_2) = (A_1P \cdot PB_1)^2,$$

azaz

$$\frac{1}{4} \geq A_1P \cdot PB_1.$$

Innen pedig

$$(1) \quad T_{A_1PB_1} + T_{A_2PB_2} = \frac{1}{2} \sin \alpha [A_1P \cdot PB_1 + A_2P \cdot PB_2] \leq \frac{1}{4} \sin \alpha.$$

Ezután megmutatjuk, hogy az oly módon definiált háromszögek, mint az A_1PB_1 és A_2PB_2 , lefedik az egész sokszöget. Legyen a sokszög egyik belső pontja Q (2. ábra). Vizsgáljuk először azt, hogy Q az A_1A_2 területfelező melyik oldalán van. Majd ezen az oldalon maradván induljunk tovább A_1 -ből a sokszög kerületén, amíg egy újabb területfelező szakasz egyik végpontjához nem érünk. Most is abba az irányba menjünk tovább, amelyik oldalra Q esik. Látható, hogy így Q beszorítható két szomszédos területfelező „közé”, tehát valóban lefedi valamelyik kívánt alakú háromszög.

Becsüljük most az (1) segítségével az ilyen háromszögek területének összegét:

$$(2) \quad T_{\text{sokszög}} \leq \sum T_{\text{háromszögek}} \leq \frac{1}{4} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n).$$

Fontos észrevétel, hogy $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi$ (hiszen ez úgy is felfogható, hogy az A_1A_2 egyenest α_1 , majd $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ szögekkel forgatunk el, s végül az A_2A_1 -hez jutunk.)

Mivel a szinuszfüggvény a $[0, \pi]$ intervallumon konkáv, használhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{n} \leq \sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right) = \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}.$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk a pozitív x -ekre (és a $\frac{\pi}{n}$ ilyen) teljesülő, ismert $\sin x < x$ egyenlőtlenséget. Innen:

$$\frac{1}{4} (\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n) < \frac{\pi}{4}.$$

Ez pedig (2)-vel összevetve épp a bizonyítandó állítást adja.

