

Osszuk el n -et maradékosan m -mel:

$$n = k \cdot m + a, \quad \text{ahol } k \text{ és } a \text{ nemnegatív egészek, } a < m.$$

A bizonyítandó egyenlőség bal oldalát A -val jelölve, így írható föl:

$$\begin{aligned} A &= \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{km+a}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{km+a+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{km+a+m-1}{m} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Az $a \geq 1$ esetben

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\left\lfloor \frac{km+a}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{km+a+m-a-1}{m} \right\rfloor}_{m-a \text{ darab; értékük } k} + \underbrace{\left\lfloor \frac{km+a+m-a}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{km+a+m-1}{m} \right\rfloor}_{a \text{ darab; értékük } k+1} = \\ &= (m-a)k + a(k+1) = mk - ak + ak + a = mk + a = n. \end{aligned}$$

Az $a = 0$ esetben pedig

$$A = \underbrace{\left\lfloor \frac{km}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{km+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{km+m-1}{m} \right\rfloor}_{m \text{ darab; értékük } k} = m \cdot k = n.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.