Pozitív számokról van szó, tehát vonhatunk n-edik gyököt:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} \geq n+1.$$

A bal oldalon az $(1+1/a_i)\quad(i=1,2,\dots,n)$ számok mértani közepe áll, ami nagyobb vagy egyenlő, mint a harmonikus közepük:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} \geq \frac{n}{\frac{1}{1+1/a_1}+\frac{1}{1+1/a_2}+\dots+\frac{1}{1+1/a_n}}.$$

Alakítsuk át az egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$\frac{n}{\frac{1}{1+1/a_1}+\frac{1}{1+1/a_2}+\dots+\frac{1}{1+1/a_n}} = \frac{n}{\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\dots+\frac{a_n}{1+a_n}} =$$

$$= \frac{n}{\frac{a_1+1}{1+a_1}+\frac{a_2+1}{1+a_2}+\dots+\frac{a_n+1}{1+a_n}-\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\dots+\frac{1}{1+a_n}\right)} = \frac{n}{n-\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\dots+\frac{1}{1+a_n}\right)}.$$

Az $\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\dots+\frac{1}{1+a_n}\right)$ összeg becsülhető a számtani és harmoniukus közepek közti egyenlőtlenséggel:

$$\frac{n}{\frac{1}{1+1/a_1}+\frac{1}{1+1/a_2}+\dots+\frac{1}{1+1/a_n}} \leq \frac{a_1+1+a_2+1+\dots+a_n+1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

(Itt felhasználtuk, hogy $a_1+a_2+\dots+a_n=1$.) Vagyis:

$$\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\dots+\frac{1}{1+a_n}\right) \geq \frac{n^2}{n+1}.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)} \geq \frac{n}{n-\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\dots+\frac{1}{1+a_n}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{n}{n-\frac{n^2}{n+1}} = \frac{n}{\frac{n^2+n-n^2}{n+1}} = \frac{n}{\frac{n}{n+1}} = n+1.$$

Ezzel igazoltuk az egyenlőtlenséget.