

I. megoldás. Tükrözzük a BCD háromszöget BD felezőmerőlegesére. A tükrözésnél B és D felcserélődik, C képe pedig egy C' -vel jelölt pont lesz (1. ábra). A tükrözés miatt $CD = C'B$, $CB = C'D$ és $T_{ABCD} = T_{ABC'D}$, továbbá

$$\begin{aligned} \angle ADC' &= \angle ADB + \angle BDC' = \angle ADB + \angle DBC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \quad \text{és} \\ \angle ABC' &= \angle ABD + \angle DBC' = \angle ABD + \angle BDC = 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Tehát az ABC' és az ADC' háromszögek derékszögűek, így

$$T_{ABC'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \quad \text{és} \quad T_{ADC'} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC' = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CB.$$

Vagyis

$$T_{ABCD} = T_{ABC'D} = T_{ABC'} + T_{ADC'} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot DB).$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, mert $\angle ABC + \angle ADC = \angle ABD + \angle DBC + \angle ADB + \angle BDC = 20^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ (2. ábra). $\angle CAD = \angle CBD = 60^\circ$, mert ugyanakkora ívhez tartozó kerületi szögek. Ekkor viszont $\angle CAD + \angle ADB = 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, vagyis a négyszög átlói egymásra merőlegesek, ezért a négyszög területe az átlók szorzatának a fele: $T_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

Ptolemaiosz tétele szerint (megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötetének 1259. feladatában) egy húrnégyszög átlóinak szorzata megegyezik a szemközti oldalak szorzatának összegével, vagyis

$$T_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Hegedűs Márton (Fazekas. M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Mindkét megoldás során kihasználtuk, hogy az $ABCD$ négyszög konvex. Bár a feladat szövegében ez kimondva nem szerepelt, a fogalmazásból úgy lehetett érteni, („az $ABCD$ négyszögben az $\angle ABD$ ” stb. szögekről, tehát a négyszög belsejében lévő szögekről szól a feladat). Ha a konvexitást nem tesszük fel, akkor az állítás nem igaz, pl. a 3. ábrán lévő A, B, C, D pontok esetén (ezt az ábrát úgy kaptuk, hogy az 1. ábra A pontját tükröztük a BD egyenesre) mind a négy szög a kívánt nagyságú, az $ABCD$ négyszög területe viszont nyilván kisebb, mint $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.