

Ha egy n szám prímtenyezős felbontása $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, akkor osztóinak a száma $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1)$; egy osztó ugyanis $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ alakú, ahol $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, vagyis p_1 kitevője éppen $(\alpha_1 + 1)$ -féle lehet, p_2 -é $(\alpha_2 + 1)$ -féle és így tovább. Ezt felhasználva először meghatározzuk, hogy legfeljebb hány osztója lehet egy kétjegyű számnak.

Mivel $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, azért egy kétjegyű számnak 1-, 2- vagy 3-féle prímosztója lehet. Az előbbiek szerint $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ és $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ osztóinak száma megegyezik, s az utóbbi, feltéve, hogy $p < q < r$, nem nagyobb az előbbinél; vagyis a keresett maximum biztos, hogy a $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakú kétjegyű számok között is fellép. Vizsgáljuk ezeket!

Ha egy ilyen alakú számnál fellép a maximum, akkor $2^{(a+1)} \cdot 3^b \cdot 5^c$, minthogy az előbbinél több osztója van, szükségképpen már háromjegyű. Elegendő tehát azokat a számokat tekinteni, amelyekben a 2 kitevője az adott b és c mellett a lehető legnagyobb.

Minthogy $5^3 \geq 100$, így szükségképpen $c \leq 2$. Ha $c = 2$, akkor $2^a \cdot 3^b < 4$, azaz a $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakú kétjegyű számok közül a $2 \cdot 5^2$ és a $3 \cdot 5^2$ rendelkezik a legtöbb osztóval, mégpedig 6-tal.

Ha $c = 1$, akkor $2^a \cdot 3^b \leq 19$, vagyis az itteni maximum lehetőségek:

$$b = 2 \rightarrow 2 \cdot 3^2 \cdot 5, \text{ hiszen } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \geq 100; \text{ osztói száma } 12$$

$$b = 1 \rightarrow 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \text{ osztói száma } 12$$

$$b = 0 \rightarrow 2^4 \cdot 5, \text{ osztói száma } 10.$$

Ha pedig $c = 0$, akkor $b \leq 4$, a lehetőségek tehát (zárójelben az osztók száma):

$$b = 4 \rightarrow 3^4, (5)$$

$$b = 3 \rightarrow 2 \cdot 3^3, (8)$$

$$b = 2 \rightarrow 2^3 \cdot 3^2, (12)$$

$$b = 1 \rightarrow 2^5 \cdot 3, (12)$$

$$b = 0 \rightarrow 2^6, (7)$$

Megállapítottuk, hogy egy kétjegyű számnak legfeljebb 12 osztója lehet, s rögtön látjuk, hogy a $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^5 \cdot 3 = 96$, számoknak éppen ennyi osztója van. Keressük meg a többi ilyen számot.

Nézzük először a 3-féle prímosztóval rendelkezőket. Ezek $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ alakúak, ahol $a \geq b \geq c \geq 1$ és $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = 12$, ami csak úgy lehet, ha $a = 2$, $b = c = 1$. Tehát a keresett számok p^2qr alakúak. Mivel p, q, r különböző prímek, azért a legkisebb közülük legalább 2, a középső legalább 3, a legnagyobb legalább 5, azaz $p^2qr \geq p \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30p$. Ez viszont $p^2qr \leq 99$ miatt csak úgy lehet, ha $p = 2$ vagy 3. A $p = 3$ esetben $3^2qr \leq 99$, amiből $qr \leq 11$, ez csak $q = 2$, $r = 5$ (vagy fordítva) mellett lehetséges. A $p = 2$ esetben $qr = 24$. Feltehető, hogy $q < r$, ekkor $r \geq 5$ s így $q < 5$, vagyis $q = 3$. Emellett $r = 5$ vagy 7 állhat. Kaptuk tehát a $3^2 \cdot 2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ és a $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ eseteket.

Nézzük most a $p^a q^b$ alakúakat, ahol $a \geq b \geq 1$. Az előzőekhez hasonló megfontolással látható, hogy akkor $a = 3$, $b = 2$ vagy $a = 5$, $b = 1$ léphet csak föl. Az $a = 5$ esetben szükségképpen $p = 2$, így $q \leq \frac{99}{32}$, azaz $q = 3$. Az $a = 3$ esetben $p^2 q^2 \geq 2^2 \cdot 3^2 = 36$, vagyis $99 \leq p^3 q^2 \leq 36p$, amiből $p \leq 2,75$, azaz $p = 2$; valamint $q \leq \sqrt{\frac{99}{8}}$, ami $q = 3$ esetén teljesülhet. Tehát a $2^5 \cdot 3$ és a $2^3 \cdot 3^2$ eseteket kaptuk.

A p^n alakú számok esetén, ha az osztók száma 12, akkor $a = 11$. Ez azonban $p^{11} \geq 2^{11} > 99$ miatt nem lehetséges. Összefoglalva, a keresett számok a következők:

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84, \quad 2^5 \cdot 3 = 96, \quad 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Megjegyzés. Igen sok beküldő meglegedett az általunk is eredményül kapott számok (vagy ezek némelyikének) felsorolásával, minden további magyarázat, indoklás nélkül (miért ennyi a maximum; van-e még más szám, amelynek szintén ennyi osztója van). Ezek a dolgozatok — a pontversenyre érvényes „az eredmények pusztá közlése nem elegendő a megoldáshoz” elvnek megfelelően — az elérhető maximális pontszámnak csak egy részét kapták meg.