

Legyen $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + x_1$, $a_2 = 1 + x_1 + x_2$, $\dots$, $a_n = 1 + x_1 + \dots + x_n = 2$. Így

$$\begin{aligned} s &= \max \left(\frac{a_1 - a_0}{a_1}, \frac{a_2 - a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \right) = \max \left(1 - \frac{a_0}{a_1}, \dots, 1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) = \\ &= 1 - \min \left(\frac{a_0}{a_1}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Mivel pozitív számokról van szó, azért a minimumuk nem nagyobb a mértani közepüknél, azaz

$$s \geq 1 - \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

Tehát

$$s \geq 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

Ezt az értéket viszont fel is veszi, még hozzá pontosan akkor, ha

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

vagyis ha az a_i számok egy mértani sorozat egymást követő elemei. Az $a_0 = 1$, $a_n = 2$ választás miatt ez azt jelenti, hogy

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \sqrt[n]{2}, \quad a_2 = \sqrt[n]{2^2}, \quad \dots, \quad a_n = 2,$$

amiből

$$x_1 = \sqrt[n]{2} - 1, \quad x_2 = \sqrt[n]{2^2} - \sqrt[n]{2}, \quad \dots, \quad x_k = \sqrt[n]{2^k} - \sqrt[n]{2^{k-1}}, \quad \dots, \quad x_n = 2 - \sqrt[n]{2^{n-1}}.$$

Ezzel a feladat mindkét kérdését megválasztottuk.

Koblinger Egmont (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn. II. o. t.)
dolgozata alapján