

Jelöljük a háromszög súlypontját S -sel. A súlyvonalak harmadolva metszik egymást, tehát

$$AS = \frac{2}{3}s_a, \quad BS = \frac{2}{3}s_b, \quad CS = \frac{2}{3}s_c.$$

1993-12-512-1.eps

1. ábra

Az ASB, BSC, CSA háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c, \quad \frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a, \quad \frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b.$$

Ezeket összeadva

$$\frac{4}{3}(s_a + s_b + s_c) > a + b + c = 2s.$$

Innen

$$s_a + s_b + s_c > 1,5s.$$

Hátra van még a másik egyenlőtlenség igazolása.

1993-12-512-2.eps

2. ábra

Tükrözzük a háromszöget a BC oldal felezőpontjára, az A pont tükörképe legyen A' . Ekkor

$$BA' = b \quad \text{és} \quad AA' = 2s_a.$$

Ismét a háromszög-egyenlőtlenséget írjuk fel, ezúttal az ABA' háromszögben:

$$2s_a < b + c.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$2s_b < a + c,$$

$$2s_c < a + b.$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk és 2-vel elosztjuk, éppen a bizonyítandó $s_a + s_b + s_c < 2s$ egyenlőtlenséget kapjuk.