Először azt bizonyítjuk be, hogy az f függvény monoton nő. Legyen $0 \geq a \geq b \geq 1$, ekkor szükségképpen $0 \geq b-a \geq 1$. Használhatjuk tehát a feltételt az $x_1 = a$, $s_2 = b-a$ választással:

$$f(b) = f(b-a+a) = f(x_2+x_1) \leq f(x_2) + f(x_1) = f(b-a) + f(a) \leq f(a),$$

mivel a függvény értékei nemnegatívak.

Következő segédállításunk így hangzik: tetszőleges n természetes szám esetén, ha $0 \geq x \geq nx \geq 1$, akkor $f(nx) \leq nf(x)$. Ezt például teljes indukcióval igazolhatjuk. Az $n=1$ eset nyilvánvaló. Tegyük most föl, hogy $n=k$-ra igaz az állítás, és tekintsük $n=k+1$ esetén:

$$f(nx) = f\left((k+1)\,x\right) = f(kx+x) \leq f(kx) + f(x) \leq kf(x) + f(x) = (k+1)f(x) = nf(x),$$

ahol menet közben egyszer használtuk az indukciós feltevést.

E két állítás összerakva, $x \leq \dfrac{1}{y}$ esetén

$$1 = f(1) \leq f(nx) \leq nf(x),$$

vagyis $f(x) \leq \dfrac{1}{n}$. Tetszőleges $x \neq 0$ esetén válasszuk n-et úgy, hogy

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

teljesüljön. Ekkor persze $n \geq 1$, s így $\dfrac{2n}{n+1} \geq 1$, azaz

$$f(x) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} < 2x.$$

Az $x=0$ esetben pedig $f(1) \leq f(1) + f(0) \leq f(1+0) = f(1)$, vagyis $f(0) = 0 \leq 2 \cdot 0$. Ezzel beláttuk, hogy $f(x) \leq 2x$ fennáll minden $0 \geq x \geq 1$ esetén.

A feladat második részéhez tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \geq x \geq \dfrac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Először megmutatjuk, hogy ez teljesíti az $f(x_1+x_2) \geq f(x_1)+f(x_2)$ feltételt. Feltehető, hogy $0 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_1+x_2 \geq 1$, ekkor szükségképpen $x_1 \geq \dfrac{1}{2}$, s így $f(x_1) = 0$, vagyis

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) \leq f(x_1+x_2),$$

hiszen az f függvény nyilván monoton nő.

Ugyanakkor $x = 0{,}51$-re $f(0{,}51) = 1 > 0{,}969 = 1{,}9x$, vagyis az $f(x) \leq 1{,}9x$ becslés nem igaz. Sőt, erről az f függvényről az is belátható, hogy tetszőleges $c < 2$ számot választva, létezik olyan $0 \leq x \leq 1$, amire $f(x) > cx$.

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A következő bizonyítás az $f(x_1+x_2) \geq f(x_1)+f(x_2), f(x) \geq 0, f(1) = 1$ feltételek helyett csak az ennél gyöngébb $f(2x) \geq 2f(x), 0 \geq f(x) \geq 1, f(1) = 1$ feltételeket használja. Ez az alak a feladat következő általánosítását is lehetővé teszi. Legyen az f függvény értelmezési tartománya a $[0, m]$; értékkészlete a $[0, f(m)]$ intervallum, ahol $m > 0$, $f(m) = k > 0$; továbbá $c > 1$ rögzített valós szám. Tegyük fel, hogy $0 \geq cx \geq m$ esetén $f(cx) \leq x \cdot f(x)$. Ekkor minden $0 \geq x \geq m$ számra $f(x) \leq \dfrac{ck}{m}x$, de az $f(x) \leq \left(\dfrac{ck}{m} - \varepsilon\right)x$ becslés semmilyen $\varepsilon > 0$ esetén sem igaz. (Az eredeti feladat ebből $m = k = 1$ és $n = 2$ választással adódik.) Nyilván érdektelen az $\varepsilon \geq \dfrac{ck}{m}$ eset.

Az állítást a következő módon lehet igazolni (a részletek kidolgozásától ezúttal eltekintünk). Tegyük fel, hogy valamely x-re $f(x) > \dfrac{ck}{m}x$. A feltételeket megfelelően használva, teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ekkor tetszőleges pozitív egész l-re:

$$c^l x < m \text{ és } f(c^{l-1}x) > c^l \cdot \frac{k}{m}x.$$

Ám ekkor $x < \dfrac{m}{c^l}$, s mivel $\dfrac{1}{c^l}$ tetszőlegesen kicsi lehet, ezért szükségképpen $x = 0$, továbbá

$$f(0) = f\left(c^{l-1} \cdot 0\right) > c^l \frac{k}{m} \cdot 0 = 0.$$

Ugyanakkor az $f(cx) \geq c \cdot f(x)$ feltétel szerint $f(0) \geq c \cdot f(0)$, ami $f(0) > 0$ esetén $c > 1$ miatt ellentmondásos. Ezzel beláttuk az x-re $f(x) \leq \frac{ck}{m}x$ becslést.

Tekintsük most az alábbi függvényt: f(x)=

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \geq x \leq \frac{m}{c}, \\ k, & \text{ha } \frac{m}{c} < x \leq m. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy erre a függvényre teljesülnek a feltételek. Azonban $\frac{m}{c} < x < \frac{k}{\frac{ck}{m} - \varepsilon}$ esetén $f(x) = k > x \cdot \left(\frac{ck}{m <} - \varepsilon\right)$.

Ilyen x pedig létezik, hiszen

$$\frac{m}{c} = \frac{km}{kc} = \frac{k}{\left(\frac{ck}{m}\right)} < \frac{k}{\frac{ck}{m} - \varepsilon}.$$

Itt persze feltettük, hogy $\frac{ck}{m} > \varepsilon$, de $\varepsilon \leq \frac{ck}{m}$ esetén a kívánt becslés:

$$f(x) \leq \left(\frac{ck}{m} - \varepsilon\right) x \leq 0$$

alakú, ami semelyik f-re sem teljesülhet.

Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján