

Tekintsük a vizsgált kifejezést először az $x = y = z = 1$ értékek esetén:

$$3|a + b + c| = 3,$$

azaz

$$(1) \quad |a + b + c| = 1.$$

Ezután az $x = y = 0, z = 1$ helyettesítéssel

$$(2) \quad |a| + |b| + |c| = 1.$$

Összevetve (1)-et és (2)-t, majd négyzetre emelve

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2|ab| + 2|ac| + 2|bc| = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

vagyis

$$|ab| + |ac| + |bc| = ab + ac + bc.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$(3) \quad ab \geq 0, \quad ac \geq 0, \quad bc \geq 0.$$

Legyen most $x = 1, y = -1, z = 0$. Ekkor

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2.$$

Felhasználva, hogy tetszőleges A, B számokra $|A| + |B| \geq |A - B|$, valamint (2)-t is figyelembe véve,

$$2 = |a - b| + |b - c| + |c - a| \leq |a| + |b| + |b| + |c| + |c| + |a| = 2(|a| + |b| + |c|) = 2.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$|a - b| = |a| + |b|, \quad |b - c| = |b| + |c|, \quad |c - a| = |c| + |a|.$$

Az első négyzetre emelve

$$a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 + 2|ab|,$$

amiből

$$|ab| = -ab.$$

Ugyanez elvégezhető a másik két esetben is, tehát az

$$ab \leq 0, \quad bc \leq 0, \quad ca \leq 0$$

eredményre jutottunk. Ez és (3) együtt azt jelenti, hogy

$$ab = bc = ca = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha az a, b, c számok közül legalább kettő 0.

Az $a = b = 0$ esetet vizsgálva

$$|c| \cdot |z| + |c| \cdot |x| + |c| \cdot |y| = |x| + |y| + |z|$$

adódik, vagyis $c = \pm 1$. Hasonlóan $a = c = 0$ esetén $b = \pm 1$, míg $b = c = 0$ fennálltakor $a = \pm 1$. Ezek valóban jók is, tehát a megoldást a következő számhármások adják:

$$(0, 0, 1), (0, 0, -1), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 0), (-1, 0, 0).$$

Hegedűs Márton (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján