

Mindenekelőtt figyeljünk fel arra, hogy x és y szerepe felcserélhető. Ez nyilvánvaló a második egyenletnél, az elsőben viszont el van rejtve: $x + y$ közé bejött egy tört, amelynek értéke x -et és y -t felcserélve nem változik. Ebből a felismerésből támadhat az az ötletünk, hogy vezessük be az $u = (x - y)^2$ jelölést. Induljunk ki az $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ azonosságból, és a 2. egyenletből xy értékét helyettesítsük be, ekkor az

$$(x + y)^2 = u + 80$$

egyenletet kapjuk. Az egyenletrendszer első egyenletéből:

$$(x + y)^2 = \left(\frac{1}{u} - 10\right)^2.$$

A két kifejezést egybevetve

$$(*) \quad u + 80 = \left(\frac{1}{u} - 10\right)^2.$$

Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$u^3 - 20u^2 + 20u - 1 = 0.$$

Ez az egyenlet ún. reciprok-egyenlet, tehát ha egy u megoldása, akkor az $\frac{1}{u}$ is megoldása.

Az ismert $u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1)$ azonosság alapján könnyű a fenti egyenletet szorzattá alakítani:

$$(u - 1)(u^2 - 19u + 1) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{19 + \sqrt{357}}{2} \approx 18,9472$, $u_3 = \frac{19 - \sqrt{357}}{2} \approx 0,0528$.

Az előbbieket miatt a kapott másodfokú egyenlet is reciprok-egyenlet lesz, tehát nem véletlen, hogy megoldásai egymás reciprokai.

Az $x = \frac{x + y + x - y}{2}$, illetve $y = \frac{x + y - (x - y)}{2}$ azonosságokba helyettesítve az $(x - y)^2 = u$, $x + y = \frac{1}{u} - 10$ összefüggéseket azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{\frac{1}{u} - 10 \pm \sqrt{u}}{2}, \quad y = \frac{\frac{1}{u} - 10 \mp \sqrt{u}}{2}.$$

Mivel u mindhárom értéke pozitív, ezek mindegyikét helyettesítve az így kapott (összesen 6) számpárra mindkét egyenlet fennáll. Tekintsünk ugyanis közülük egy tetszőleges (x, y) párt, erre $x + y = \frac{1}{u} - 10$, $(x - y)^2 = u$, az első egyenletbe helyettesítve

$$x - \frac{1}{(x - y)^2} + y = \frac{1}{u} - 10 - \frac{1}{u} = -10.$$

Másrészt

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4} = \frac{(\frac{1}{u} - 10)^2 - u}{4} = \frac{\frac{1}{u^2} + 100 - \frac{20}{u} - u}{4}.$$

Az u által kielégített $(*)$ egyenletből kiolvasható, hogy

$$\frac{1}{u^2} + 100 - \frac{20}{u} - u = 80,$$

azaz valóban $xy = 20$.

Kiszámítva tehát a következő megoldásai vannak az egyenletrendszernek:

$$\begin{array}{llllll} x_1 = -4 & y_1 = -5 & x_3 \approx -2,7972 & y_3 \approx -7,15 & x_5 \approx 4,5884 & y_5 \approx 4,3588 \\ x_2 = -5 & y_2 = -4 & x_4 \approx -7,15 & y_4 \approx -2,7972 & x_6 \approx 4,3588 & y_6 \approx 4,5884. \end{array}$$