

Mivel a legnagyobb közös osztó, $a^2 - b^2$, pozitív, ezért $a > b$. Továbbá $0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$, de a és b egyszerre nem lehet 0. A feltétel szerint

$$(a^2 - b^2)|(10a + b), \quad \text{illetve} \quad (a^2 - b^2)|(10b + a).$$

Mivel két szám osztója osztója a két szám összegének és különbségének is:

$$(a^2 - b^2)|(11a + 11b), \quad \text{és} \quad (a^2 - b^2)|(9a - 9b).$$

Felhasználva az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ összefüggést és az oszthatóság tulajdonságait:

$$(1) \quad a - b | 11, \quad (2) \quad a + b | 9.$$

Mivel $a - b > 0$ és $a + b \leq 9$, ezért (1)-ből $a - b = 1$. Az $a + b > 0$ miatt (2)-ből $a + b = 1, a + b = 3$, illetve $a + b = 9$ lehet. A három esetet megvizsgálva:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a + b = 9 \\ a - b = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \end{array}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az eredményül kapott $(10, 1), (21, 12), (54, 45)$ számpárok megfelelnek a feladat feltételeinek.

Várszegi Róbert (Tata, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján