

Tekintsünk egy Q középpontú r sugarú K kört, melynek kerülete az O középpontú egységgömb felületére illeszkedik, és legyen T ezen kör kerületének egy pontja.

1993-03-121-1.eps

1. ábra

Mivel az OQ egyenes merőleges a kör síkjára, az OQT háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tétele szerint O pontnak a K kör síkjától való távolsága:

$$OQ = \sqrt{OT^2 - TQ^2} = \sqrt{1 - r^2}.$$

Így a Q pont rajta van az O körüli $\sqrt{1 - r^2}$ sugarú ($r = 1$ esetben elfajuló) S gömbön, és a K kör síkja érinti ezt a gömböt a Q pontban (1. ábra).

Megfordítva: ha Q' az S gömb felületének tetszőleges pontja, akkor az S gömböt Q' pontban érintő sík az egységgömböt egy r sugarú körben metszi.

Tehát az olyan r sugarú körök középpontjainak mértani helye, amelyek kerülete az egységgömb felületére illeszkedik, az S gömb felülete.

Ha $r = 1$ (az elfajuló S gömb csak az O pontból áll), akkor a keresett egység sugarú körök éppen az egységgömbnek az OP egyenest tartalmazó síkokkal vett síkmetszetei, és ezen körök középpontja az O pont.

A továbbiakban feltehetjük, hogy $0 < r < 1$. A fentiek szerint ekkor a feladatban keresett mértani hely éppen a P pontot tartalmazó, az S gömböt érintő síkok érintési pontjai.

Ha $OP < \sqrt{1 - r^2}$, azaz P az S gömb belsejében van, akkor nem létezik a P pontot tartalmazó, az S gömböt érintő sík, így a keresett mértani hely az üres halmaz.

Ha $OP = \sqrt{1 - r^2}$, azaz P az S gömb felületén található, akkor pontosan egy olyan sík van, amely a gömböt a P pontban érinti, tehát a keresett mértani hely csak a P pontból áll.

Tegyük fel, hogy $OP > \sqrt{1 - r^2}$, azaz P az S gömbön kívül van. Az S gömb felületének egy U pontja pontosan akkor lesz egy P ponton áthaladó sík érintési pontja, ha a PUO háromszög derékszögű (2. ábra), azaz teljesül rá Pitagorasz tétele:

$$PU = \sqrt{OP^2 - OU^2} = \sqrt{OP^2 + r^2 - 1}.$$

1993-03-122-1.eps

2. ábra

Most a megfelelő körök középpontjainak mértani helyeként az S gömb felületének és a P középpontú $\sqrt{OP^2 + r^2 - 1}$ sugarú gömb felületének a metszetét, tehát egy kört kapunk, amelynek síkja merőleges a két gömb centrálisára, vagyis az OP egyenesre. Jelöljük ennek a körnek a középpontját O' -vel, sugarát r' -vel (3. ábra).

1993-03-122-2.eps

3. ábra

Az előbb mondottakat figyelembe véve láthatjuk, hogy az OUP derékszögű háromszög U csúcsból induló magasságának talppontja O' , és az UO' magasság éppen a keletkezett kör sugara; ezért $OO' = \frac{OU^2}{OP} = \frac{1 - r^2}{OP}$ és

$$r' = UO' = \frac{OU \cdot UP}{OP} = \frac{\sqrt{1 - r^2} \cdot \sqrt{OP^2 + r^2 - 1}}{OP}.$$

A keresett mértani hely ebben az esetben tehát egy olyan O' középpontú r' sugarú kör, melynek síkja merőleges az OP egyenesre.