I. megoldás. A szögfelezőtétel szerint

$$AD=\frac{CA}{CA+CB}\cdot AB \tag{1}$$

és

$$DB=\frac{CB}{CA+CB}\cdot AB.$$

1993-03-120-1.eps

1. ábra

1993-03-120-2.eps

2. ábra

Írjuk fel kétféleképpen az ABC háromszög területét:

$$T_{ABC}=\frac{AB\cdot m}{2}=\frac{CA\cdot CB}{2},$$

tehát

$$m=\frac{CA\cdot CB}{AB}. \tag{2}$$

Először megmutatjuk, hogy $AD<m$. (1) és (2) szerint

$$AD<m\Leftrightarrow\frac{CA\cdot BA}{CA+CB}<\frac{CA\cdot CB}{AB},$$

azaz

$$AB^2-CB^2<CA\cdot CB,$$

ez pedig Pitagorasz tétele ($AB^2=CA^2+CB^2$) miatt ekvivalens a $CA^2<CA\cdot CB$, vagyis a $CA<CB$ egyenlőtlenséggel.

Ugyanúgy láthatjuk be azt is, hogy $m<DB$.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög C-ből induló magasságának talppontját T-vel. Mivel $CB>CA$, ezért $CAB\sphericalangle>CBA\sphericalangle$. Nyilvánvaló, hogy $BCT\sphericalangle=CAB\sphericalangle$ és $ACT\sphericalangle=CBA\sphericalangle$, ezért $BCT\sphericalangle>ACT\sphericalangle$, tehát $AD>AT$. A D pontban az AB átfogóra állított merőleges a BC és AC oldalegyeneseket a P és Q pontokban metszi az ábrának megfelelően.

A szögfelezőtétel szerint $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC}{CA}$. Az ABC háromszög hasonló a PBD és az AQD háromszögekhez, hiszen szögeik megegyeznek; tehát

$$\frac{DB}{AD}=\frac{BC}{CA}=\frac{DB}{DP}=\frac{DQ}{AD}.$$

Innen $AD=DP$ és $DB=DQ$ adódik.

Figyelembe véve, hogy $DP<m<DQ$, kapjuk, hogy $AD<m<DB$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Gincsai Tibor (Nyíregyháza 1.sz. Benczur Gyula Ált. Isk. 8. o. t.)
dolgozata alapján