

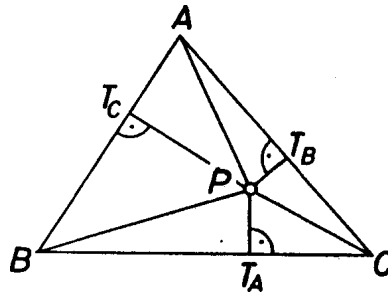
I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c -vel, magasságait a szokásos módon m_a, m_b, m_c -vel, területét T -vel. Világos, hogy $m_a \leq f_a, m_b \leq f_b, m_c \leq f_c$ és $2T = am_a = bm_b = cm_c = (a + b + c)r$. Így

$$f_a + f_b + f_c \geq m_a + m_b + m_c = r \left(\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \right),$$

és itt

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} = \\ & = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 3 \cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

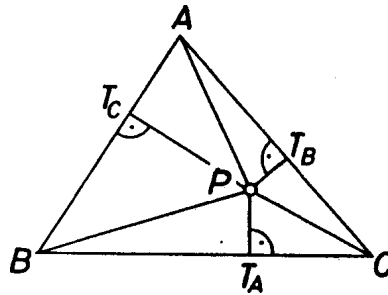
II. megoldás. Az Erdős–Mordell egyenlőtlenség szerint (lásd. *Reiman István: A geometria és határterületei*, 230. old.), ha P belső pontja egy háromszögnek (1. ábra), akkor $PA + PB + PC \geq 2(PT_A + PT_B + PT_C)$.



1. ábra

Speciálisan, ha P a beírt kör középpontja (2. ábra), akkor

$$PA + PB + PC \geq 6r.$$



2. ábra

A PA' ; PB' ; PC' szakaszok mindegyike legalább r , ezért

$$f_a + f_b + f_c = PA + PA' + PB + PB' + PC + PC' \geq 9r.$$

