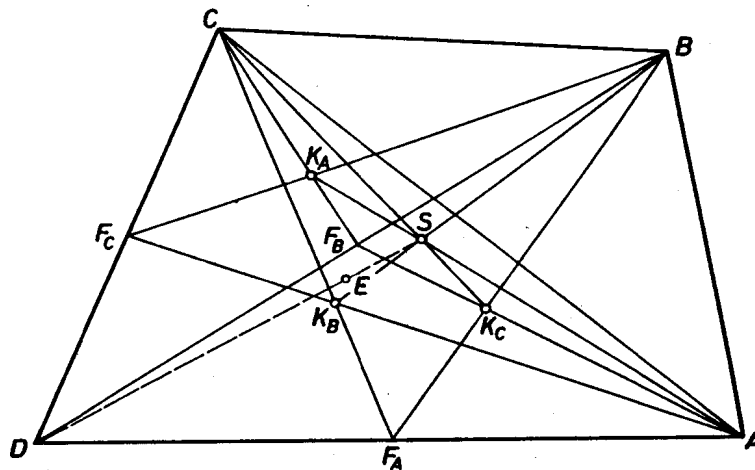


Legyen $ABCD$ egy tetraéder, súlypontja S , a D csúcsból kiinduló éleinek felezőpontja F_A, F_B, F_C , a D -re illeszkedő lapok súlypontjai K_A, K_B, K_C , végül a DS szakasz S -hez közelebbi ötödölőpontja E . Megmutatjuk, hogy ehhez a 12 ponthoz meg lehet adni 12, a feltételeknek megfelelő síkot.



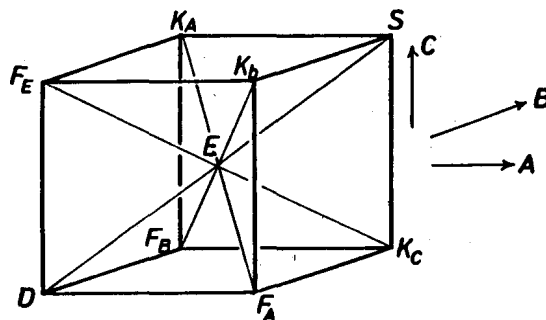
1. ábra

A súlypont definíciójából következik, hogy az (A, K_C, F_B) ; (A, K_B, F_C) ; (B, K_A, F_C) ; (B, K_C, F_A) ; (C, K_A, F_B) ; (C, K_B, F_A) ; (A, K_A, S) ; (B, K_B, S) és (C, K_C, S) ponthármasok kollineárisak. A DS , $F_A K_A$, $F_B K_B$ és $F_C K_C$ egyenesek mindegyike átmegy az E ponton. Ezt vektorok segítségével bizonyítjuk: Ha $\vec{DA} = 60\mathbf{a}$, $\vec{DB} = 60\mathbf{b}$ és $\vec{DC} = 60\mathbf{c}$, akkor a felezőpont, illetve a súlypont helyvektorának ismert tulajdonsága alapján $\vec{DF}_A = 30\mathbf{a}$, $\vec{DF}_B = 30\mathbf{b}$, $\vec{DF}_C = 30\mathbf{c}$, $\vec{DK}_A = 20(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\vec{DK}_B = 20(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ és $\vec{DK}_C = 20(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. $\vec{DS} = 15(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, ezért $\vec{DE} = 12(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Viszont a szakaszt adott arányban osztó pont helyvektorára vonatkozó képlet szerint a $12(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ vektor éppen az $F_A K_A$, $F_B K_B$ és $F_C K_C$ szakaszokat $3 : 2$ arányban osztó pont helyvektora, mivel

$$\frac{2 \cdot 30\mathbf{a} + 3 \cdot 20(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{2 + 3} = \frac{2 \cdot 30\mathbf{b} + 3 \cdot 20(\mathbf{a} + \mathbf{c})}{2 + 3} = \frac{2 \cdot 30\mathbf{c} + 3 \cdot 20(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{2 + 3} = 12(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Ezek után már könnyen megadhatjuk a feltételeknek eleget tevő 12 síkot: az eredeti tetraéder D -n átmenő 3 lapsíkja; az a 4 sík, amelyek a tetraéder egy D -n át nem menő élét és az ezzel szemközti él felezőpontját tartalmazza, továbbá átmegy a tetraédernek és két lapjának a súlypontján (ilyen sík pl. az A, B, F_C, S, K_A, K_B pontok síkja); végül az a 6 sík, amely átmegy a $DF_A K_B F_C F_B K_C S K_A$ csongagúla két-két szemközti élén, az E ponton és az A, B, C pontok egyikén (ilyen sík pl. az F_A, K_B, F_B, K_A, E, C pontok síkja). Ez utóbbi síkok létezésének bizonyítása azon múlik, hogy az említett csongagúláról megmutattuk, hogy valamennyi testátlója átmegy az A, B, C pontok valamelyikén.

A 12 pont közül semelyik 6 nem kollenáris, ezért a 12 síkkal együtt eleget tesznek a feladat feltételeinek.



2. ábra

Megjegyzések 1. A feladatban szereplő alakzat tulajdonképpen a projektív geometriában ismert ún. *Reye-féle konfiguráció*. Ennek a projektív térben a legegyszerűbb előállítás a következő: a pontok egy kocka csúcsai, a kocka középpontja és a kocka három éli irányának megfelelő ideális pontok; a síkok a kocka lapsíkjai és két-két szemközti élét tartalmazó síkok. A 2. ábrán jól látható az analógia megoldásunk és a kocka között.

2. Belátható, hogy négy gömb páronként vett külső és belső hasonlósági pontjai is a feladatban szereplő konfigurációt alkotják.