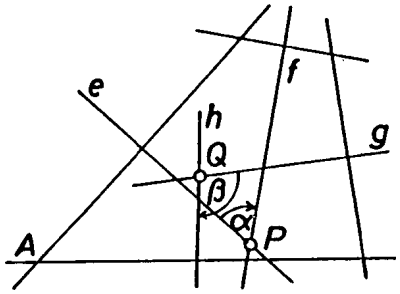
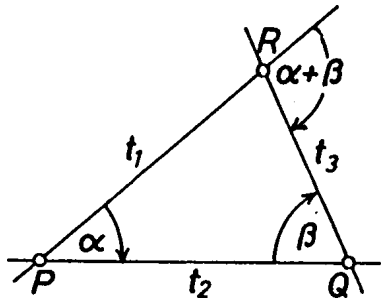
A feladatot geometriai transzformációk sorozatának alkalmazásával oldjuk meg. Ennek során felhasználjuk, hogy két metsző egyenesre való tükrözés egymásutánja az egyenesek metszéspontja körüli, a tengelyek által bezárt szög kétszeresével való forgatás, míg két párhuzamos egyenesre történő tükrözés eredője egy olyan eltolás, amelynek vektora az egyenesekre merőleges, és hossza a két egyenes távolságának kétszerese.



1. ábra

A szerkesztés tulajdonképpen $\frac{4!}{4} = 6$ feladat megoldását igényli aszerint, hogy az oldalfelező merőlegeseknek megfelelő oldalak közül melyek a szomszédosak. A 6 egyforma feladat közül egyet oldunk meg, azaz feltesszük, hogy a megadott e, f, g, h egyenesekhez tartozó oldalak ebben a sorrendben követik egymást a keresett négyszögben (*1. ábra*). Az e és h egyenesekhez tartozó oldalak közös A végpontját úgy jellemezhetjük, hogy éppen azon pontja a síknak, amelyet rendre az e, f, g, h egyenesekre tükrözve, képként végül saját magát kapjuk. A négy tükrözés eredőjét könnyen megszerkeszthetjük: legyen e és f metszéspontja P, g és h metszéspontja Q, a PQ egyenest jelölje t_2. ($P = Q$ esetén legyen t_2 egy, a $P = Q$ ponton átmenő tetszőleges egyenes.) A t_2 egyenesre P-ben mérjük fel az e és f egyenesek által bezárt α (irányított) szöget, amelynek t_2-től különböző szára t_1, ugyanígy megszerkeszthetjük a Q-n átmenő, t_2-vel a (g és h által bezárt) β szöget bezáró t_3 egyenest. Ekkor az e, f, g, h egyenesekre való tükrözések eredője megegyezik a t_1, t_2, t_2, t_3 egyenesekre történő tükrözések eredőjével, ami – a t_2-re való kétszeri tükrözés miatt – a t_1 és t_3-ra való tükrözés eredője, vagyis a t_1 és t_3 egyenesek R metszéspontja körüli $\alpha + \beta$ szögű elforgatás. Az elforgatás egyetlen fixpontja R lévén, a keresett A csúcs éppen az R, és ennek az e, majd az f és azután a g egyenesre vonatkozó tükörképei a négyszög további csúcsai.



2. ábra

Ha a P, Q, R metszéspontok valamennyien léteznek és különbözők, akkor a feladatnak (e, f, g, h rögzített sorrendje mellett) egyetlen megoldása van. Nincs megoldás, ha $e \parallel f, f \parallel g, g \parallel h$ vagy $h \parallel e$ (pl. ha f és g párhuzamos – vagy egybeesik –, akkor az ismertetett szerkesztés minden lépése végrehajtható ugyan, de az eredményül kapott négyszög legalább háromszöggé fajul). Nincsen továbbá megoldás, ha $\alpha + \beta = 180^\circ$ és $P \neq Q$. Végtelen sok megoldás van, ha $P = Q$ és $\alpha + \beta = 180^\circ$, végül nincs megoldás, ha $P = Q$ és $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ (ilyenkor a szerkesztés ponttá fajuló négyszöget adna).