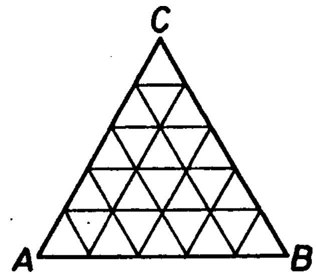
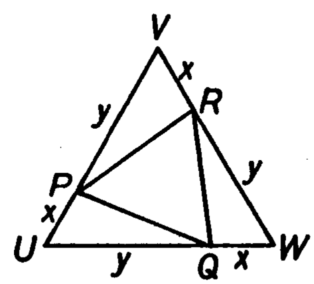
Nevezzük normálisnak azokat a szabályos háromszögeket, amelyek csúcsai a felosztással keletkezett hálózat rácspontjai, és amelyek az eredeti háromszöggel azonos állásúak (vagyis az eredeti háromszög pozitív arányú középpontos kicsinyítésével kaphatók).



1. ábra

Jelöljük a k egységnyi oldalhosszúságú normális háromszögek számát a_k-val (nyilván $1 \leqslant k \leqslant 5$; az eredeti háromszög oldalait 5 egységnyinek véve, $a_5 = 1$). Legyen PQR egy tetszőleges szabályos részháromszög. Tegyük fel, hogy például az AC egyeneshez P, az AB egyeneshez Q, a BC egyeneshez R van a legközelebb. A P, Q, R pontokon át párhuzamost húzva rendre AC-vel, AB-vel, illetve BC-vel olyan UVW normális háromszöghöz jutunk, amely UV, UW, VW oldalain tartalmazza P-t, Q-t és R-et. A háromszögek szabályossága miatt $UP = VR = WQ = x$ és $PV = RW = QU = y$. Ha az UVW háromszög oldala k egység, akkor $0 \leqslant x \leqslant k-1$, így UVW-be a PQR-éhez hasonló módon k darab rácsháromszög irható. Mivel minden rácsháromszög pontosan egy normális háromszögbe írható, azért az ABC-ben lévő szabályos rácsháromszögek száma: $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$.



2. ábra

Legyen XYZ egy k oldalhosszúságú normális háromszög, és $XY \parallel AB$, $YZ \parallel BC$, $ZX \parallel CA$. Az XYZ-t egyértelműen meghatározza az, hogy XY az AB-től, YZ a BC-től, illetve ZX a CA-tól hány sornyi távolságra van. Ha a szóban forgó távolságok a, b, illetve c, akkor $0 \leqslant a, b, c$ és $a + b + c = 5 - k$. A fenti két feltételnek eleget tevő bármely a, b, c számhármas egy k oldalhosszúságú normális háromszöget határoz meg; így a_k megegyezik azon egész számokból álló a, b, c rendezett számhármasoknak a számával, amelyekre $a+b+c = 5-k$ teljesül. Itt az a értéke 0-tól $5-k$-ig változhat; az a ismeretében b már csak a $0, 1 \ldots, 5-k-a$ számok valamelyike lehet, ami $6-k-a$ lehetőség (rögzített a és b mellett c egyértelműen meghatározott). Tehát

$$a_k = \sum_{a=0}^{5-k}(6-k-a) = (6-k)^2 - \frac{(6-k)(5-k)}{2} = \frac{(6-k)(7-k)}{2}.$$

Így a keresett háromszögek száma:

$$15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 70.$$

Megjegyzés. Ha 5 helyett n részre osztjuk az ABC háromszög oldalait, akkor a szabályos rácsháromszögek száma:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n+1-k)(n+2-k)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \binom{n+3}{4}.$$