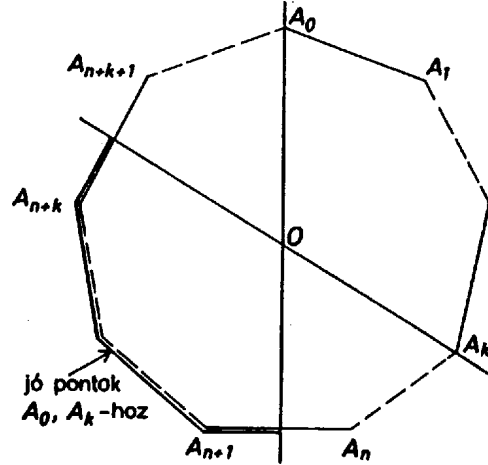


I. megoldás. Jelöljük a $(2n+1)$ -szög csúcsait $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ -nel, középpontját pedig O -val. Tekintsük az A_0A_k átlót ($k \leq n$). Az $A_0A_kA_l$ háromszög pontosan akkor tartalmazza O -t, ha A_l az OA_0 és az OA_k egyenesek által meghatározott négy síknegyed közül az A_0A_k szakaszt tartalmazóval szemköztiben van. Az OA_0 egyenes a sokszög A_nA_{n+1} , az OA_k egyenes pedig a sokszög $A_{n+k}A_{n+1+k}$ oldalát metszi, tehát $A_0A_kA_l$ pontosan akkor jó háromszög, ha $n+1 \leq l \leq n+k$ (1. ábra). Ezért rögzített A_0A_k esetén a jó háromszögek száma $(n+k) - n = k$. Vagyis az A_0 -t tartalmazó jó háromszögek száma $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

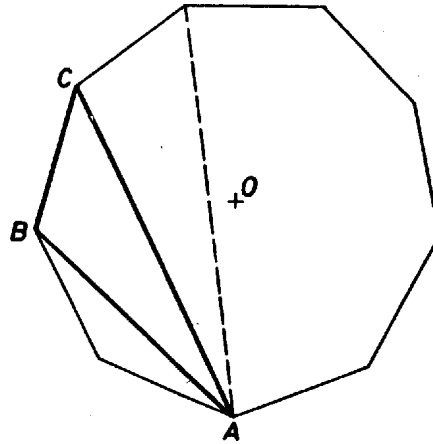


1. ábra

Nilván ugyanennyi jó háromszög tartalmazza a $(2n+1)$ -szög tetszőleges, rögzített csúcsát. Ezért $(2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ megegyezik a jó háromszögek számának háromszorosával, hiszen minden jó háromszöget mindhárom csúcsánál számoltunk.

Tehát a jó háromszögek száma $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

II. megoldás. A $(2n+1)$ -szög csúcsai összesen $\binom{2n+1}{3}$ háromszöget határoznak meg. A jó háromszögek számát megkapjuk, ha ebből levonjuk azon (rossz) háromszögek számát, amelyek nem tartalmazzák a sokszög középpontját. Ezeket a háromszögeket a következőképp számoljuk össze.



2. ábra

Betűzzük meg a háromszög csúcsait A, B, C -vel úgy, hogy AC legyen a leghosszabb oldal, és a háromszög körüljárása negatív legyen (ekkor az AC egyenes elválasztja B -t a sokszög középpontjától, 2. ábra). Minden rossz háromszöghöz egyértelműen tartozik egy betűzés. Ha A -t rögzítjük, akkor a sokszög A után negatív körüljárási irányban következő n csúcsa közül bármelyik kettőt kiválasztva kapunk egy rossz háromszöget, s minden olyan rossz háromszöget megkapunk így, amelynek A csúcsa a rögzített csúcs. Ezen háromszögek száma tehát $\binom{n}{2}$. A -t $(2n+1)$ -féleképpen rögzíthetjük, így a rossz háromszögek száma $(2n+1) \cdot \binom{n}{2}$.

A jó háromszögek száma:

$$\binom{2n+1}{3} - (2n+1) \cdot \binom{n}{2} = \frac{2n+1}{6} [2n(2n-1) - 3n(n-1)] = \frac{2n+1}{6} (n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

György András (Budapest, Árpád Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján